
Zur Dynamik und Statistik kosmischer Strukturen

Matthias Ostermann



München 2014

Zur Dynamik und Statistik kosmischer Strukturen

Matthias Ostermann

Dissertation
an der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Matthias Ostermann
aus München

München, 7. Oktober 2014

Erstgutachter: Prof. Dr. Herbert Wagner

Zweitgutachter: Priv.-Doz. Dr. Martin Kerscher

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Februar 2015

Abstract

Die vorliegende Arbeit behandelt Themen der Dynamik und der Statistik kosmischer Strukturen. Ihr vorrangiges Ziel ist es, dem Leser Werkzeuge an die Hand zu geben, um die Bildung großräumiger Strukturen im Universum sowohl analytisch als auch deskriptiv behandeln zu können.

Im dynamischen Teil erweitere ich die bekannte Zel'dovich-Approximation, welche die Strukturbildung im schwach nichtlinearen Bereich beschreibt, auf den allgemeinrelativistischen Fall. Dazu werden die Einsteingleichungen im Lagrangebild mit Cartans Coframes als alleinigen dynamischen Variablen abgeleitet, sowie analog zum Newtonschen Fall eine allgemeine Lösung für die Koeffizienten der Coframes im Störungsschema erster Ordnung bestimmt. Ich gebe eine saubere Definition der relativistischen Zel'dovich-Approximation, welche jede Feldgröße streng als ein Funktional der linearisierten Lösung ansieht und so außer bei den Coframes keine Vernachlässigungen höherer Ordnungen vornimmt. Diese Näherung, obwohl als Extrapolation einer Störungslösung gewonnen, kann nichtperturbativ angewendet werden und stellt damit ein probates Werkzeug zur Analyse nichtlinearer Modelle dar. Als Beispiel wird die Approximation für ein Universum mit flachem FLRW-Hintergrund angegeben. Weiterhin werden die entsprechenden Gleichungen mit dem elektrischen und magnetischen Teil des Weyltensors formuliert.

Im statistischen Teil stelle ich das in seiner Rohfassung von Alexander Rabus und Jens Schmalzing geschriebene und von mir weiterentwickelte Programm CHIPMINK vor, mit dessen Hilfe die Verteilung von Punkten im dreidimensionalen Raum quantitativ erfasst und analysiert werden kann. Dazu werden die partiellen Minkowskifunktionale der einzelnen Punkte eines Datensatzes berechnet und zu den globalen Funktionalen aufsummiert. Die Berechnung der Minkowskifunktionale ist schon bei kleinen Datenmengen statistisch robust, das Programm eignet sich daher im besonderen Maße zum Vergleich beobachteter und simulierter Daten – etwa zur Bewertung des einer Simulation zugrunde liegenden physikalischen Modelles. In der vorliegenden Arbeit wird es auf die in den Rotverschiebungskatalogen 2dFGRS und SDSS beobachtete Galaxienverteilung angewendet. Im Fall des SDSS werden die berechneten Minkowskifunktionale mit denjenigen für den simulierten Katalog LasDamas verglichen.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	ix
Verwendete Abkürzungen	x
1 Beobachtung und Simulation kosmischer Strukturen	1
2 Zur Dynamik kosmischer Strukturen	9
2.1 Grundlagen und Vorgehensweise	9
2.2 Die Newtonsche Gravitation im Lagrangebild	14
2.2.1 Das Lagrange-Newton-System	15
2.2.2 Die Zel'dovich-Approximation	20
2.3 Die Einsteingleichungen im Lagrangebild	24
2.3.1 Das Lagrange-Einstein-System (LES)	27
2.3.2 Die Formulierung mit dem Weyltensor	36
2.3.3 Der Newtonsche Grenzfall	41
2.4 Das Störungsschema erster Ordnung	43
2.4.1 Das LES in erster Ordnung	43
2.4.2 Der Weyltensor in erster Ordnung	48
2.4.3 Die allgemeine Lösung für den Spurteil	49
2.5 Die Relativistische Zel'dovich-Approximation (RZA)	50
2.5.1 Vorüberlegung und Definition	51
2.5.2 Die funktionale Berechnung der Feldvariablen	54
2.5.3 Die RZA für einen flachen FLRW-Hintergrund	58
2.6 In der Sprache der Differentialformen	61
2.6.1 Die Cartanschen Strukturgleichungen	61
2.6.2 Die Newtonschen Gleichungen	65
2.6.3 Die Einsteinschen Gleichungen	65
2.7 Zusammenfassung	67
3 Zur Statistik kosmischer Strukturen	69
3.1 Grundlagen und Vorgehensweise	69
3.2 Die Implementierung der Minkowskifunktionale	76
3.2.1 Das Germ-Grain-Modell	76
3.2.2 Die partiellen Minkowskifunktionale	80
3.2.3 Die Behandlung der Ränder	83
3.2.4 Die Berechnung des Strukturvolumens	86
3.2.5 Die Minkowskifunktionale eines Poisson-Prozesses	88

3.3	Der 2 degree Field Galaxy Redshift Survey (2dFGRS)	89
3.3.1	Die Datenauswahl und -aufbereitung	90
3.3.2	Die Minkowskifunktionale des 2dFGRS	96
3.4	Der Sloan Digital Sky Survey (SDSS)	99
3.4.1	Die Minkowskifunktionale des DR4plus	100
3.4.2	Die Datenaufbereitung zum DR7	103
3.4.3	Die Minkowskifunktionale des DR7	105
3.4.4	Nicht-Gaussische Anteile im DR7	107
3.5	Zusammenfassung	111
4	Diskussion und Ausblick	113
A	Anhang: Differentialformen	115
A.1	Einführung	115
A.2	Zu Cartans Strukturgleichungen	119
B	Anhang: Das Programm CHIPMINK	127
B.1	Ein Werkzeug zur Strukturuntersuchung	127
B.1.1	Das CHIPMINK-README	128
B.1.2	Der Hauptprogrammteil <code>main.chipmink.c</code>	131
B.2	Ein exemplarischer Run für den 2dFGRS	134
B.2.1	Durchführung	135
B.2.2	Ergebnisse	140
B.3	Anwendung in der Polymerphysik	141
	Literaturverzeichnis	143
	Danksagung	159
	Curriculum Vitae	161

Abbildungsverzeichnis

1.1	Beobachtung und Simulation der Large Scale Structure	3
3.1	Die Eigenschaften der Minkowskifunktionale	70
3.2	Parallelkörper in zwei Dimensionen	72
3.3	Zur Eulercharakteristik	74
3.4	Das Germ-Grain-Modell	77
3.5	Zum Schnitt von zwei und drei Kugeln	82
3.6	Zur Berechnung der partiellen Minkowskifunktionale	84
3.7	Zur Behandlung der Ränder	85
3.8	Zur Volumenberechnung von A_r	87
3.9	Die Minkowskifunktionaldichten für einen Poisson-Prozess	88
3.10	Die Verteilung der Galaxien beim 2dFGRS	90
3.11	Die Berechnung der Minkowskifunktionale für den 2dFGRS	91
3.12	Die lokale Vollständigkeit im 2dFGRS	92
3.13	Die Volumen-limitierten Datensätze des 2dFGRS	94
3.14	Die Distanz der Galaxien zum Maskenrand im 2dFGRS	95
3.15	Die Minkowskifunktionale für den 2dFGRS	98
3.16	Die spektroskopische Himmelsabdeckung beim SDSS	99
3.17	Der Volumen-limitierte Datensatz im SDSS DR4plus	100
3.18	Der Volumen-limitierte Datensatz im SDSS DR4plus: Schnitt	101
3.19	Die Minkowskifunktionale des SDSS DR4plus	102
3.20	Schnitt durch das dunkle Sample des SDSS DR7	104
3.21	Die Galaxienverteilung im SDSS DR7 und im LasDamas-Katalog105	
3.22	Die Minkowskifunktionale des SDSS DR7	106
3.23	Vergleich der MFs von SDSS DR7 und LasDamas	108
3.24	Die Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen im SDSS DR7	110
B.1	Globale Minkowskifunktionale für 2dFGRS-Subsamples	140
B.2	Minkowskifunktionale zur Koagulation von Polymeren	142

Verwendete Abkürzungen

Teil 1: Zur Dynamik kosmischer Strukturen

- **ENS/LNS:** Euler-Newton-System zur Beschreibung nichtrotierenden, selbstgravitierenden Staubs bzw. Lagrange-Newton-System in mitbewegten (Lagrangeschen) Koordinaten
- **LES:** Lagrange-Einstein-System zur Beschreibung nichtrotierenden, selbstgravitierenden Staubs bei Einsteinscher Gravitation
- **NZA/RZA:** Newtonsche bzw. Relativistische Zel'dovich-Approximation zur Beschreibung der Strukturbildung im schwach nichtlinearen Bereich
- **FLRW:** Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Lösung der Einstein-Gleichungen für eine homogene, isotrope Expansion des Universums

Teil 2: Zur Statistik kosmischer Strukturen

- **CfA:** Durch das *Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics* erstellter Rotverschiebungskatalog von etwa 18000 Galaxien
- **2dFGRS:** Rotverschiebungskatalog *2 degree Field Galaxy Redshift Survey* des *Anglo-Australian Observatory* mit etwa 232000 Galaxien
 - **NGP/SGP:** *Northern* bzw. *Southern Galactic Plane*
- **SDSS:** Rotverschiebungskatalog *Sloan Digital Sky Survey* der *Alfred P. Sloan Foundation* mit etwa 1,8 Millionen Galaxien
 - **DR4plus/DR7:** Datensätze der *Data Releases 4plus* bzw. *7*
 - **LRG:** Der *Luminous Red Galaxy*-Datensatz des DR7
- **Λ CDM:** *Lambda Cold Dark Matter*-Modell, Standardmodell der Big-Bang-Kosmologie mit dunkler Energie und kalter dunkler Materie

Kapitel 1

Beobachtung und Simulation kosmischer Strukturen

[Between the wind] and Unsurpassed lie one
billion four-continent world-systems,
A great third-order thousand [world-system].
Multiplying that by the factors of one billion
[Yields] Infinite Links, Continuums, Oceans.

*Buddhist Cosmology Teachings*¹

Immer größer, immer genauer – mit besser werdender Technik sind Objekte im Universum so präzise beobachtbar wie noch nie. So wurden in den letzten Jahren einige bemerkenswerte großräumige Strukturen entdeckt (EINASTO et al. [2011]; SYLOS LABINI [2011]; PARK et al. [2012]; CLOWES et al. [2013]; KEENAN, BARGER und COWIE [2013]; WHITBOURN und SHANKS [2014]). Bereits im Juni 2003 wurden nach mehrjähriger Messung durch das Anglo-Australische Observatorium die Daten des Galaxienkatalogs 2dFGRS veröffentlicht, welcher die Spektren von fast 250000 Objekten im Universum umfasst (COLLESS [1999]; COLLESS et al. [2001]; COLLESS et al. [2003]). Nahezu zeitgleich ging 2002 der Sloan Digital Sky Survey mit der Veröffentlichung des Early Data Release in die entscheidende Phase (STOUGHTON et al. [2002]). Im folgenden Jahrzehnt stellte die SDSS-Kollaboration der Physikergemeinde immer größere Datensätze für ihre Forschung zur Verfügung, 2003-2005 die Data Releases 1-3 des SDSS-I sowie bis 2008 diejenigen des SDSS-II bis einschließlich Data Release 7, das über eine Million Objekte beinhaltet und damit genaue dreidimensionale Karten großer Teile des Universums ermöglicht (ABAZAJIAN et al. [2009]). Seitdem sind drei weitere Datensätze herausgegeben worden, aktuell 2014 das Data Release 10 (AHN et al. [2014]). Mit Erscheinen des vollen Katalogs DR 12 im Januar 2015 schließt die dritte Generation SDSS-III des Großprojektes ab und geht in die finale Phase IV über, die 2020 enden soll. Bis heute sind hunderte Artikel erschienen, welche die Daten des SDSS zur Untersuchung

¹ Mündliche Überlieferung, als *The Encompassment of All Knowledge* von Kongtrul Lodrö Tayé gesammelt und 1862 veröffentlicht, übersetzt in KONGTRUL (1995), S. 61

der Sternentstehung bis hin zur Verteilung der Galaxien im Universum nutzen.

Immer größer, immer schneller – Hand in Hand einhergehend mit den genauer werdenden Beobachtungen sind bei steigender Prozessorleistung moderner Computernetzwerke Berechnungen der Entwicklung des Universums in einem Umfang möglich, wie sie noch vor wenigen Jahrzehnten als völlig utopisch erschienen. So stehen am Ende einer Reihe von Simulationen, welche die Strukturbildung im Universum prozessieren (DOROSHKOVICH et al. [1997]; COLE et al. [1998]), die durch das Virgo-Konsortium am Max-Planck-Institut für Astrophysik in Garching durchgeführten Simulationen, die sogenannten Millennium Runs I und II (SPRINGEL et al. [2005]; BOYLAN-KOLCHIN et al. [2009]). Im Millennium Run I wird die räumliche und zeitliche Entwicklung mit 2160^3 , d.h. etwa zehn Milliarden Teilchen während eines Rotverschiebungsintervalles von $z = 127$ bis $z = 0$ in einem Würfel mit einer Kantenlänge von zwei Milliarden Lichtjahren simuliert.² Aus der vollen Simulation lassen sich Galaxienkataloge mit typischerweise etwa $2 \cdot 10^7$ Galaxien extrahieren, hierzu und zu weiteren Details des Millennium Runs siehe SPRINGEL et al. (2005) sowie CROTON et al. (2006). Auf demselben Code für gravitative Entwicklung basieren die Simulationen des LasDamas-Teams um Cameron McBride, die 2009 veröffentlicht wurden.³

Es bietet sich an, zusätzliche wertvolle Rückschlüsse auf Strukturentstehungsprozesse im Universum zu ziehen, indem diese beiden Karten des Universums – die vermessene und die simulierte – miteinander verglichen werden. Verdeutlicht wird dies in Abbildung 1.1. Zu sehen sind die in den Katalogen 2dFGRS, CfA2 und SDSS zusammengetragene beobachtete Verteilung von Galaxien (linker und oberer Sektor) sowie die in der ersten Millennium-Simulation gewonnene Verteilung (rechter und unterer Sektor).⁴ Dabei stimmen gegenüberliegende Sektoren im Rotverschiebungsintervall überein, so

² Die 2008 durchgeführte Simulation Millennium II enthielt ebensoviele Teilchen, allerdings in einem Würfel, dessen Kantenlänge um den Faktor fünf kleiner war als bei Millennium I. Die Datenbanken der Simulationen finden sich auf der Homepage des Max-Planck-Instituts für Astrophysik unter <http://www.mpa-garching.mpg.de/millennium/> sowie <http://www.mpa-garching.mpg.de/galform/millennium-II/> (Stand April 2013).

³ Die von der LasDamas-Kollaboration erstellten Mock-Kataloge sind unter <http://lss.phy.vanderbilt.edu/lasdamas/mocks.html> frei zugänglich.

⁴ Der in dieser Arbeit nicht besprochene Rotverschiebungskatalog des Harvard Smithsonian Center for Astrophysics (CfA) besteht aus den Daten zu einigen Tausend Galaxien, die während zweier Phasen (1977-1982 sowie 1985-1995) vermessen wurden, siehe dazu HUCHRA et al. (1990); HUCHRA, GELLER und CORWIN (1995). Er ist damit einer ersten Rotverschiebungskataloge überhaupt. Zur Entdeckung der „CfA2 Great Wall“ in den Daten der zweiten Phase siehe RAMELLA, GELLER und HUCHRA (1992).

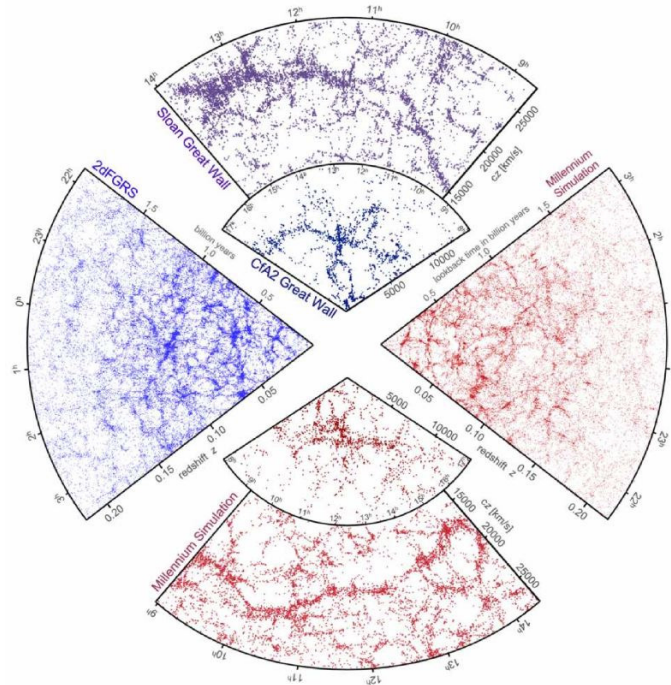


Abbildung 1.1: Beobachtete und simulierte großräumige Struktur im Universum, Abbildung aus SPRINGEL, FRENK und WHITE (2006), Seite 28.

dass die Ähnlichkeit der Strukturen deutlich hervortritt.

Um letztendlich die Güte des den Simulationen zugrunde liegenden physikalischen Modells beurteilen zu können, braucht es zuverlässige und strukturermpfindliche Deskriptoren zur Analyse der Verteilungen, vgl. die aktuellen Arbeiten von NADATHUR (2013) und NADATHUR und HOTCHKISS (2014).

Die vorliegende Arbeit behandelt nun zwei der bei dem beschriebenen Vorgehen auftretenden Fragen. Zum Einen stößt die Newtonsche Betrachtungsweise der Strukturbildung durch immer genauer werdende Beobachtung des Universums und deutlich umfangreicher werdende Datenmengen an ihre Grenzen. Relativistische Modelle wurden in den letzten beiden Jahrzehnten zwar vorgestellt, aber nicht mit letzter Konsequenz durchgeführt (CROUDACE et al. [1994]; SALOPEK, STEWART und CROUDACE [1994]; KASAI [1995]; RUSS et al. [1996]; ELLIS und TSAGAS [2002]). Daher wird sich der erste Teil der Arbeit mit dem Ziel befassen, eine volle Lagrangesche Störungsrechnung für die relativistische Kosmologie zu erarbeiten. Insbesondere wird die aus der Newtonschen Kosmologie wohlbekannte Zel'dovich-Näherung (ZEL'DOVICH [1970][1]; ZEL'DOVICH [1970][2]; ARNOL'D, SHANDARIN und ZEL'DOVICH [1982]; BUCHERT [1992]) auf den relativistischen

Fall erweitert.

Die hier formulierte relativistische Zel’dovich-Approximation kann dazu beitragen, eine Grundlage für allgemeinere nichtlineare – sowohl störungstheoretisch als auch nicht störungstheoretisch behandelte – Modelle zu bilden, indem sie die bisherigen Studien zur relativistischen Störungstheorie sowie zu exakten Lösungen für Modelle mit hoher Symmetrie ergänzt. Die dargelegte Näherung bietet nicht nur die Möglichkeit zu Anwendungen in der relativistischen Kosmologie, sondern lässt sich in zukünftigen Arbeiten mit Entwicklungsgleichungen für räumlich gemittelte Größen kombinieren, siehe z.B. BUCHERT (2000)(2) und BUCHERT (2001). Mit dieser Vorgehensweise ließen sich zum Beispiel nichtperturbative Modelle definieren, die in der Lage sind, das Rückreaktionsproblem („backreaction problem“) der relativistischen Kosmologie oder auch das Problem der dunklen Energie zu behandeln (siehe BUCHERT [2006][1]; BUCHERT [2008]; BUCHERT [2011]; BUCHERT und CARFORA [2002]; BUCHERT und RÄSÄNEN [2012]; CLARKSON et al. [2011]; ELLIS [2011]; KOLB [2011]; RÄSÄNEN [2011], und Referenzen darin). Diese realistischen Modelle öffnen zudem die Tür zum Verständnis anderer Anwendungen wie den nichtlinearen Anteilen an Gravitationswellenstrahlung oder der Lichtausbreitung und Längenmessung in realitätsnahen inhomogenen Modellen unseres Universums, die nicht innerhalb des Rahmens verstanden werden können, den die Newtonsche Kosmologie oder die streng linearisierte relativistische Behandlung vorgeben.

Ein gerade im Hinblick auf den Vergleich beobachteter und simulierter Strukturen wertvoller Aspekt der hier entwickelten relativistischen Zel’dovich-Approximation ist, dass Simulationen zur Strukturbildung wie die Millennium Runs bisher oftmals mit durch die Newtonsche Zel’dovich-Approximation vorgegebenen Anfangsbedingungen gestartet werden, siehe dazu SPRINGEL et al. (2005) und SPRINGEL (2005). Gerade im Hinblick auf die Genauigkeit zukünftiger Simulationen gegenüber immer präziser werdenden Beobachtungen scheint es wichtig, dass diese mit den entsprechenden relativistischen Anfangsbedingungen initiiert werden.

Auf der anderen Seite können Erkenntnisse der Integralgeometrie dazu benutzt werden, mehrdimensionale Strukturen durch einen klar definierten Satz an morphologischen, d.h. geometrischen und topologischen, Maßen vollständig festzulegen, den so genannten Minkowski-Funktionalen (MECKE und WAGNER [1991]; MECKE, BUCHERT und WAGNER [1994]; MECKE [2000]; KERSCHER [2000]). Auf diese Weise kann das Maß der Abweichung beobachteter zu simulierten Daten quantitativ erfasst werden. Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit wird daher das Konzept der Strukturanalyse mittels

Minkowski-Funktionalen besprochen und der Programmcode CHIPMINK („Code for High-speed Invigation of Partial Minkowski Functionals“) vorgestellt, mit dessen Hilfe sich die Funktionale beliebiger Punkt-Datensätze bestimmen lassen. Der Code wird anschließend auf die Galaxienkataloge 2dFGRS und SDSS sowie simulierte Daten angewendet. In einem Ausblick auf eine Anwendung in der Polymerphysik wird die Universalität der Vorgehensweise verdeutlicht, siehe HÜTTER (2003).

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt:

Kapitel 2 befasst sich mit der Dynamik kosmischer Strukturen. Nachdem in 2.1 die Grundlagen sowie der aktuelle Forschungsstand zum behandelten Thema vorgestellt wurden, wird in Kapitel 2.2 der Übergang vom Eulerbild in das Lagrangebild für den Fall Newtonscher Gravitation vollzogen. Dadurch wird das Lagrange-Newton-System zur Beschreibung nichtrotierenden, selbstgravitierenden Staubs formuliert. Dieses Gleichungssystem wird sowohl in tensorieller Schreibweise als auch in der Sprache der Differentialformen angegeben. Eine alternative Formulierung mit dem Gezeitentensor wird aufgestellt und diskutiert. Schließlich wird, ausgehend von der Lagrangeschen Störungsrechnung erster Ordnung, die Newtonsche Zel'dovich-Näherung reproduziert, was als Basis für die relativistische Erweiterung dienen wird.

In Kapitel 2.3 wird – ganz analog zu 2.2 – das Lagrange-Einstein-System zur Beschreibung nichtrotierenden, selbstgravitierenden Staubs für den Fall Einsteinscher Gravitation abgeleitet. Dazu wird zunächst ein Raum-Zeit-Split in mitbewegten Koordinaten durchgeführt, was die bekannten Gleichungen von Arnowitz, Deser und Misner liefert. Danach wird durch Einführen von Cartans Methode der Coframes der Übergang zum Lagrange-Einstein-System vollzogen. Dieses System von Entwicklungs- und Bedingungsgleichungen für die Coframes als einziger dynamischer Variable wird schließlich mit Hilfe des Weyltensors formuliert. Aufgrund der formalen Analogie zu den Gleichungen aus Kapitel 2.2 wird der geometrische Limes exakter Basisformen mit dem Newtonschen Grenzfall identifiziert. Damit wird eine Methode zur Konstruktion von Lösungen in der relativistischen Kosmologie aus bekannten analytischen oder approximativen Lösungen der Newtonschen Kosmologie angegeben.

Ausgehend von den erarbeiteten Gleichungen wird in 2.4 das allgemeine Schema der Störungsrechnung erster Ordnung für den relativistischen Fall aufgestellt. Zusätzlich zu Ausdrücken für den elektrischen und magnetischen Teil des Weyltensors wird dabei eine allgemeine Lösung für den in der relativistischen Kosmologie häufig verwendeten Spurteil erster Ordnung gegeben.

In 2.5 schließlich wird die relativistische Erweiterung der Zel'dovich-Näherung vorgestellt. Streng analog zur Newtonschen Definition werden ausschließlich die Komponenten der Coframes als alleinige dynamische Variable linearisiert, wohingegen die restlichen Feldvariablen als Funktionale der Coframes mit voller Konsequenz durch diese ausgedrückt werden. Es entsteht so ein natürlicher Übergang vom linearen in den leicht nichtlinearen Bereich der Strukturbildung. Nach einer funktionalen Berechnung der Feldvariablen wird die Näherung auf den Fall eines flachen FLRW-Hintergrunds angewendet.

Im Kapitel 2.6 wird das Lagrange-Einstein-System mit Differentialformen beschrieben. Die alternative Formulierung mit den ebenfalls in Differentialformen ausgedrückten Teilen des Weyltensors zeigt schließlich sehr deutlich die formale Analogie zur Newtonschen Betrachtungsweise, wo der Gezeiten-tensor die Rolle des elektrischen Teils des Weyltensors übernimmt.

Kapitel 3 befasst sich mit der Statistik kosmischer Strukturen. Nach einer kurzen Einleitung werden in 3.1 die mathematischen Grundlagen zur Strukturanalyse mit Hilfe eines Satzes morphologischer Maße, der Minkowskifunktionale gelegt. Ausgehend von ihrem Ursprung in der Integralgeometrie werden die wesentlichen Eigenschaften der Minkowskifunktionale – Additivität, Bewegungsinvarianz und bedingte Stetigkeit – besprochen, bevor sie mit dem Konzept der Parallelkörper anhand von Beispielen in zwei bzw. drei Dimensionen mit bekannten geometrischen sowie topologischen Größen in Verbindung gebracht werden. Dank ihrer einfachen Interpretierbarkeit und dadurch, dass die Minkowskifunktionale nach dem Satz von Hadwiger eine Struktur morphologisch eindeutig bestimmen, sind sie mächtige Werkzeuge bei der Analyse ausgedehnter Strukturen.

In 3.2 wird beschrieben, wie die Minkowskifunktionale grundsätzlich bestimmt und wie diese Berechnungen im Speziellen in einem Computerprogramm umgesetzt werden können. Hierzu wird zunächst unter Verwendung des Germ-Grain-Modells aus einem Punktdatensatz, wie er etwa bei der Untersuchung von Rotverschiebungskatalogen vorliegt, eine ausgedehnte Struktur gebildet. Dabei wird jeder Punkt mit einer Kugel versehen, deren Radius als diagnostischer Parameter bei der Strukturuntersuchung dient. Aufgrund ihrer Additivität können für eine Struktur, die aus konvexen Körpern gebildet wird, drei der vier Minkowskifunktionale durch Summieren lokaler Beiträge bestimmt werden, der so genannten partiellen Minkowskifunktionale. Das hier verwendete Prinzip der Implementierung beruht auf der Erstellung von Nachbarlisten zu den einzelnen Punkten des betrachteten Datensatzes und der anschließenden Berechnung der jeweiligen lokalen Beiträge. Eine Sonderrolle nimmt dabei das Strukturvolumen ein, das anders bestimmt werden

muss. Entgegen dem üblichen Vorgehen mittels einer einfachen Monte-Carlo-Integration wird hier eine Methode eingeführt, die analog zu den übrigen Funktionalen auf dem Summieren lokaler Beiträge beruht. Ausführlich besprochen wird zudem die wichtige Frage nach der Behandlung der Ränder der Beobachtungsmaske. Dieser wird durch die Wahl einer reduzierten Maske Rechnung getragen. Der Abschnitt wird abgeschlossen durch die graphische Darstellung der Ergebnisse eines ersten Programmdurchlaufs.

Nachdem die Prinzipien der Berechnung geklärt wurden, werden in 3.3 die Minkowskifunktionale im Fall des Rotverschiebungskatalogs 2dFGRS bestimmt und graphisch dargestellt. Es wird besprochen, wie die erstellten Graphen Aufschlüsse auf die Struktur des untersuchten Datensatzes zulassen. Eine Diskrepanz zwischen den Minkowskifunktionalen für die Datensätze der nördlichen (NGP) und der südlichen (SGP) galaktischen Ebene wird deutlich zu erkennen sein. Besonderer Wert wird hier allerdings auf die Datenauswahl und -aufbereitung gelegt, denn der vorgelegte Programmcode benötigt Volumen-limitierte Datensätze. Ein solcher wird Schritt für Schritt aus den Rohdaten des 2dFGRS extrahiert, wobei zusätzlich ein Parameter eingeführt wird, der die Güte der Rotverschiebungsmessung in eine bestimmte Raumrichtung widerspiegelt und lokale Vollständigkeit genannt wird.

Ähnlich werden im Abschnitt 3.4 die Minkowskifunktionale für das *Data Release 4plus* des Rotverschiebungskatalogs SDSS berechnet sowie die Ergebnisse der Analyse des LRG-Samples (*Luminous Red Galaxy*) aus dem *Data Release 7* gegeben, die in Zusammenarbeit mit Alexander Wiegand und Thomas Buchert durchgeführt wurde. Insbesondere werden in diesem Zusammenhang auch die Minkowskifunktionale für entsprechende Datensätze des LasDamas Mock-Katalogs bestimmt und mit den Ergebnissen des SDSS-Runs verglichen. Hier werden sich signifikante Abweichungen zwischen der beobachteten und der simulierten Galaxienverteilung zeigen. Knapp werden die Fragen behandelt, ob die beobachteten Abweichungen bereits in den Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen der Datensätze beobachtet werden können und ob Nicht-Gaussische Anteile im Prozess der Galaxienverteilung gefunden werden können.

Der Anhang der Arbeit gliedert sich wie der Hauptteil in einen dynamischen und einen statistischen Teil. Während in Anhang A zunächst eine Einführung in das Konzept der Differentialformen gegeben wird und anschließend alternative Formulierungen der gewählten Metrik ausgehend von den Cartanschen Strukturgleichungen besprochen werden, sind die drei Abschnitte von Anhang B dem Programmcode CHIPMINK gewidmet, mit dem die Minkowskifunktionale im Statistikeil berechnet wurden. Dieses Programm

wird mit der vorliegenden Arbeit den Lesern zur Verfügung gestellt, weswegen in Anhang B.1 neben der ReadMe-Datei auch Auszüge aus dem Programm gelistet werden. In Anhang B.2 wird ein Run für den Rotverschiebungskatalog 2dFGRS exemplarisch durchgeführt und in Anhang B.3 abschließend eine Anwendung des entwickelten Programmcodes in der Polymerphysik beschrieben.

Kapitel 2

Zur Dynamik kosmischer Strukturen

The heavens [...] and below are destroyed by fire.
Space alone remains, a vacuity containing nothing at all.
Again formation occurs, and again abiding, and finally
destruction by fire.

*Buddhist Cosmology Teachings*⁵

Zur Behandlung der Entstehung großräumiger Strukturen im Universum wird zunächst die bekannte Lagrangesche Störungsrechnung in der Newtonschen Kosmologie besprochen, die seit den 1980er Jahren erfolgreich auf diesem Gebiet angewandt wird. Dabei wird das besondere Augenmerk auf der Zel'dovich-Approximation liegen, die die Strukturbildung bis in den schwach nichtlinearen Bereich hinein beschreibt. Danach werden in analoger Weise die relativistischen Gleichungen in Lagrangescher Form aufgestellt und mit Hilfe der Störungsgleichungen erster Ordnung schließlich eine saubere Definition der relativistischen Zel'dovich-Approximation angegeben. Diese Näherung, obwohl durch Extrapolation einer Störungslösung gewonnen, kann nichtperturbativ angewendet werden und stellt damit ein probates Werkzeug zur Analyse nichtlinearer Modelle dar. So können Fragestellungen wie die Strukturbildung auf großen Skalen, Rückwirkungsprobleme und die Propagation von Licht in einem inhomogenen Universum behandelt werden. Viele der Ergebnisse dieses Teils der vorliegenden Arbeit sind publiziert in BUCHERT und OSTERMANN (2012).

2.1 Grundlagen und Vorgehensweise

In den letzten beiden Jahrzehnten genossen zwei schon lange bekannte Konzepte verstärkte Aufmerksamkeit in der relativistischen Kosmologie. Das eine ist die aus der Fluidodynamik bekannte Lagrangesche Betrachtungsweise, die bereits in der Newtonschen Kosmologie mit großem Erfolg angewandt wurde (BERTSCHINGER [1992]; BERTSCHINGER und JAIN [1994]; BOUCHET [1996];

⁵ KONGTRUL (1995), S. 61.

BUCHERT [1993]; BUCHERT [1995]; MATARRESE und TERRANOVA [1996][1], und Referenzen darin). Zum anderen erfährt der von Hermann Weyl eingeführte konforme Krümmungstensor, oder einfach Weyltensor, zunehmend Beachtung, da er bei einer Reihe von Problemen der relativistischen Kosmologie sowie der Quantengravitation eine wichtige Rolle zu spielen scheint (BERTSCHINGER und HAMILTON [1994]; BERTSCHINGER und JAIN [1994]; ELLIS und DUNSBY [1997]; KOFMAN und POGOSYAN [1995]).

Der Übergang vom Eulerbild zum Lagrangebild, der aus der Fluidodynamik wohlbekannt ist, stellt einen Koordinatenwechsel von Eulerkoordinaten zu neuen unabhängigen Koordinaten, den Lagrangekoordinaten dar. Er wird Newtonsch vollzogen durch die Transformation

$$\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}, t) \quad \text{mit} \quad \vec{X} = \vec{f}(\vec{X}, t_0) \quad (2.1)$$

Die Lagrangekoordinaten \vec{X} sind mitbewegte, zeitlich konstante Koordinaten, die zum Anfangszeitpunkt t_0 mit den Eulerkoordinaten \vec{x} übereinstimmen. Die Beschreibung der den Teilchen zugeordneten Größen durch Felder wird ersetzt durch die lokale Beschreibung der Eigenschaften eines bestimmten Teilchens. Die drei Komponenten $f^i(\vec{X}, t)$ der Deformation, die die Abweichung des beobachteten Teilchens von seiner Position am Anfangszeitpunkt beschreiben, sind im Lagrangebild die einzigen unabhängigen Variablen.⁶ Eine elementare Einführung in dieses Gebiet findet sich bei EHLERS und BUCHERT (1997). Damit kann in der Newtonschen Kosmologie für den Fall rotationsfreien, selbstgravitierenden Staubs ein Gleichungssystem angegeben werden, das nur noch Entwicklungsgleichungen für die Komponenten der Deformation enthält (EHLERS und BUCHERT [1997]; BUCHERT, KERSCHER und SICKA [2000]). Die Bedingungsgleichungen müssen nur zur Anfangszeit gelöst werden. Dieses System dient als Grundlage für eine Lagrangesche Störungsrechnung, die die Strukturbildung im Universum auf großen Skalen sehr gut beschreibt (RÜEDE und STRAUMANN [1997]; BUCHERT, KERSCHER und SICKA [2000]).

Durch immer genauer werdende Beobachtung des Universums und immer umfangreicher werdende Datenmengen stößt die Newtonsche Betrachtungsweise jedoch an ihre Grenzen, da relativistische Effekte vernachlässigt werden. In den letzten Jahren wurden Versuche gemacht, dieses System auf den Fall relativistischer Kosmologie zu erweitern (MATARRESE, PANTANO und

⁶ Das gilt, solange sich die Trajektorien \vec{f} nicht schneiden. In dem Fall sich schneidender Trajektorien müssen die Eulerschen Geschwindigkeiten als unabhängige Variablen dazugenommen werden. Die Berechnungen finden dann im Phasenraum statt.

SAEZ [1994][1]; MATARRESE, PANTANO und SAEZ [1994][2]; MATARRESE und TERRANOVA [1996][2]). Der Übergang von Euler- zu Lagrangekoordinaten findet hier statt, indem die sechs unabhängigen Variablen der räumlichen Metrik⁷ ersetzt werden durch

$$g_{ij}(X, t) = \delta_{ab} \eta_i^a(X, t) \eta_j^b(X, t) \quad (2.2)$$

An die Stelle der Deformationskomponenten als einzige unabhängige Variablen im Newtonschen Fall treten allgemeinrelativistisch die räumlichen Komponenten von Cartans Coframes, die Triaden oder „Dreibeine“ η_i^a .⁸ Die Lagrangesche Metrik $G_{ij}(X)$ ist mit der Anfangsmetrik zum Zeitpunkt t_0 über die Coframes zum Anfangszeitpunkt $\eta_i^a(X, t_0) \equiv \dot{\eta}_i^a(X)$ verbunden durch

$$G_{ij}(X) \equiv g_{ij}(X, t_0) = \delta_{ab} \dot{\eta}_i^a(X) \dot{\eta}_j^b(X) \quad (2.3)$$

So entsteht ein relativistisches Gleichungssystem zur Beschreibung nichtrotierenden, selbstgravitierenden Staubs, das auch in der Sprache der Differentialformen formuliert werden kann. Dem Übergang von Newtonscher zu allgemeinrelativistischer Theorie entspricht dann der Übergang exakter zu nichtexakten Basen. Aufgrund der formalen Analogie eines Teiles des relativistischen Gleichungssystems mit dem Newtonschen System wird außerdem ein geometrischer Grenzwert exakter Basisformen als Newtonscher Grenzfall nahegelegt, der äußerst leicht durchzuführen ist.

Motiviert wird die Erweiterung des Systems zum Einen durch die Möglichkeit, sowohl analytische als auch approximative Lösungen der Newtonschen Kosmologie durch formale Umkehrung des geometrischen Grenzwerts auf einfache Weise auf den allgemeinrelativistischen Fall übertragen zu können. Zum anderen bilden die Gleichungen die Grundlage für eine relativistische Lagrangesche Störungsrechnung, vgl. DAUTCOURT (1997). In der Lagrangeschen Störungsrechnung wird die Deformations-Einsform als alleinige dynamische Variable den Störungen ausgesetzt.⁹ So kann die in der Newtonschen Kosmologie äußerst erfolgreiche Zel’dovich-Approximation (BUCHERT [1992]; BUCHERT [1993]; BUCHERT und EHLERS [1997]; EHLERS und BU-

⁷ Für Lagrangesche, mitbewegte Koordinaten hat die vierdimensionale Metrik die einfache Form ${}^{(4)}g_{00} = -1$, ${}^{(4)}g_{0i} = 0$ und ${}^{(4)}g_{ij} = {}^{(3)}g_{ij} \equiv g_{ij}$. Die vier weiteren Freiheitsgrade wurden bei dieser Wahl der Koordinaten fixiert durch die Festsetzung der Lapse-Funktion $N = 1$ und des Shift-Vektors $N^i = 0$. Für Details siehe MISNER, THORNE und WHEELER (1973).

⁸ Für eine allgemeine Einführung zu diesem Thema siehe ELLIS und VAN ELST (1999), und Referenzen darin.

⁹ Zu einer allgemeinen Störungstheorie in der relativistischen Kosmologie siehe MUKHANOV, FELDMAN und BRANDENBERGER (1992).

CHERT [1997]) auf den relativistischen Fall erweitert werden. Diese wird angewandt, um nichtlineare Anteile in der Strukturbildung zu beschreiben. Relativistische Analoga zur Zel'dovich-Approximation (ZEL'DOVICH [1970][1]; ZEL'DOVICH [1970][2]; ZEL'DOVICH [1978]; SHANDARIN und ZEL'DOVICH [1989]; SAHNI und COLES [1995]) für die Beschreibung der Strukturbildung im schwach nichtlinearen Bereich wurden bereits vorgeschlagen, zuerst von KASAI (1995); für eine Verallgemeinerung auf Störungslösungen zweiter Ordnung siehe RUSS et al. (1996) sowie RUSS et al. (1997). Diese Werke werden ebenso in die Betrachtung einbezogen wie auch diejenigen von Matarrese und seinen Mitautoren zur Störungsrechnung erster bzw. höherer Ordnung (MATARRESE, PANTANO und SAEZ [1994][1]; MATARRESE, PANTANO und SAEZ [1994][2]; MATARRESE und TERRANOVA [1996][2]; MATARRESE, MOLLERACH und BRUNI [1998]), welche die relativistischen Verallgemeinerungen der Newtonschen Gleichungen in Lagrangescher Form diskutieren, sowie ELLIS und TSAGAS (2002), die entsprechend dem Ansatz von Zel'dovich eine voll kovariante Beschreibung der pekuliären Bewegung eingeführt haben.

In der vorliegenden Arbeit wird der Lagrangesche Standpunkt mit voller Konsequenz im Rahmen der Einsteinschen Gleichungen umgesetzt werden, wobei der Formalismus so nah wie möglich am Newtonschen Analogon gehalten wird. Diese Vorgehensweise hat drei entscheidende Vorteile. Zum Ersten gelingt es damit, eine in Form und Vorgehensweise natürliche Erweiterung der Näherung von Zel'dovich herzuleiten, die allgemeiner ist als diejenige, die von KASAI (1995) vorgeschlagen wurde. Die Gleichungen beinhalten so z.B. eine quadratische Form der Metrik, nichttriviale Näherungen für den Ricci-Tensor, den Krümmungsskalar und den elektrischen und magnetischen Teil des Weyltensors, sowie nichtlineare Anteile, die als Gravitationswellenanteile interpretiert werden können. Zum Zweiten beinhalten die vorgestellten allgemeinrelativistischen Lagrangeschen Gleichungen das bekannte Lagrange-Newton-System als klar definierten geometrischen Grenzfall und bieten eine Alternative zu dem Satz an Gleichungen, der von MATARRESE und TERRANOVA (1996)(2) dazu hergeleitet wurde, indem hier lediglich eine einzige dynamische Feldvariable betrachtet wird. Zum Dritten kann auf diese Weise eine Reihe von wichtigen kinematischen und dynamischen Größen kovariant dargestellt werden, ganz im Sinne von ELLIS und TSAGAS (2002). In der vorliegenden Arbeit werden außerdem eine Reihe nützlicher Details zu den abgeleiteten Gleichungen und insbesondere zum elektrischen und magnetischen Teil des Weyltensors betrachtet, die in weiteren Arbeiten von Thomas Buchert und seinen Mitarbeitern aufgegriffen werden, so z.B. in BUCHERT, NAYET und WIEGAND (2013).

Anhand einer Zusammenfassung der hauptsächlich von Buchert durchgeführten Untersuchung für den Newtonschen Fall (BUCHERT [1989]; BUCHERT [1992]; BUCHERT [1993]; BUCHERT [1995]; EHLERS und BUCHERT [1997]) wird gezeigt, was die relativistischen Analoga sind zu sowohl dem Lagrangeschen Deformationsgradienten, der im Newtonschen Fall die einzige dynamische Feldvariable darstellt, als auch zu den einzig durch ihn ausgedrückten Entwicklungsgleichungen. Die Lösung erster Ordnung für Störungen vor einem flachen FLRW-Hintergrund, die dann wie später beschrieben in den schwach nichtlinearen Bereich fortgesetzt wird, beruht ebenfalls auf dem Verständnis des Newtonschen Grenzfalles.

Die Untersuchung wird hier zunächst auf den Fall des Materiemo­dells „nichtrotierender Staub“ (*irrotational dust*) beschränkt. Prinzipiell ist das Vorgehen bei anderen Materietypen aber dasselbe, siehe dazu z.B. ADLER und BUCHERT (1999). Für dieses Modell werden klar definierte Antworten auf die oben aufgeworfenen Fragen präsentiert und die enge Verwandtschaft zwischen den Newtonschen und den allgemeinrelativistischen Gleichungen aufgezeigt. Das erlaubt es, auf direktem Wege Wissen über erstgenannten Fall auf zweiten zu übertragen. Der Erfolg der entsprechenden Newtonschen Näherung deutet zudem darauf hin, dass nun auch die relativistische Zel’dovich-Näherung ein vielversprechendes Modell darstellen kann.

Damit sind wir – was eine der Hauptmotivationen für die vorliegende Arbeit war – für einen Paradigmenwechsel in der relativistischen Kosmologie gut gerüstet, den die Notwendigkeit realistischer inhomogener Modelle möglicherweise mit sich bringt. Krümmungseffekte können einen der Schlüssel für das Verständnis und die präzise Definition kosmologischer Parameter in der näheren Zukunft darstellen. So sollte sich zum Beispiel die räumlich gemittelte skalare Krümmung zeitlich anders entwickeln als ein homogenes Modell mit konstanter Krümmung, was ausgehend von einer kleinen Krümmung, wie sie in den Beobachtungen des Kosmischen Mikrowellenhintergrundes zu sehen ist, zu einer effektiven negativen Krümmung im späten Universum führen kann, siehe dazu BUCHERT (2011); BUCHERT und CARFORA (2008); BUCHERT und RÄSÄNEN (2012); RÄSÄNEN (2006); ELLIS und BUCHERT (2005). Auch die Interpretation kosmologischer Parameter und ihrer Abhängigkeit von Krümmungseffekten beim Vergleich von gemittelten Größen in inhomogenen Geometrien mit solchen im Friedmann-Raum stellt in diesem Zusammenhang ein weiteres aktuelles und interessantes Forschungsgebiet dar (BUCHERT und CARFORA [2003]; LARENA et al. [2009]). Zuletzt ist anzumerken, dass das Anwenden von Newtonschen Kosmologien bei jedem Modell zur Strukturentstehung und -entwicklung periodische Randbedingungen er-

fordert (BUCHERT, KERSCHER und SICKA [2000]), welche im relativistischen Fall nicht zwingend erforderlich sind (BUCHERT [2000][1]; BUCHERT [2008]; BUCHERT [2011]).

2.2 Die Newtonsche Gravitation im Lagrangebild

Zur Beschreibung der Kinematik der Kontinua gibt es grundsätzlich zwei gleichberechtigte Betrachtungsweisen. Im *Eulerschen* (räumlichen) Bild sind die den Teilchen zugeordneten Eigenschaften, wie etwa Dichte und Geschwindigkeit, als Funktionen des Ortes und der Zeit gegeben. Der Beobachter sitzt im Punkt \vec{x} . Er misst die zeitliche Veränderung einer Feldfunktion in diesem fixierten Punkt. Dagegen ist der Beobachter im *Lagrangeschen* (materiellen) Bild fest mit einem Teilchen \vec{X} verbunden. Er misst die zeitliche Änderung der Eigenschaften dieses bestimmten Teilchens. Diese sind jetzt gegeben als Funktionen von Teilchenkennung \vec{X} und Zeit t . Lagrangesche Koordinaten sind also mitbewegte Koordinaten. Der Wechsel zwischen den Bildern ist bei Kenntnis der Transformationen $\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}, t)$ und $\vec{X} = \vec{h}(\vec{x}, t)$ möglich. Alleinige dynamische Variablen im Lagrangebild sind die Komponenten $f^i(\vec{X}, t)$ des Deformationsfelds.¹⁰

In diesem Abschnitt wird zunächst der Übergang von Eulerschen zu Lagrangeschen Koordinaten für rotationsfreien, selbstgravitierenden Staub vollzogen. Das System von Gleichungen, das die Feldfunktionen Dichte ρ , Geschwindigkeit \vec{v} und Beschleunigung \vec{g} der Staubpartikel im Fall von Newtonscher Gravitation beschreibt, wird als Euler-Newton-System bezeichnet. Das durch den Koordinatenwechsel entstehende System von Entwicklungsgleichungen für den Deformationsgradienten heißt Lagrange-Newton-System. Es wird hier sowohl in Tensorschreibweise als auch in der Sprache der Differentialformen angegeben und untersucht. Darauf folgend wird eine alternative Formulierung mithilfe des Gezeitentensors, bzw. der Gezeitenform, abgeleitet. Diese erweist sich als äußerst kompakt und elegant.

Im zweiten Teil dieses Abschnittes wird die Newtonsche Zel'dovich-Näherung mit Hilfe der ersten Ordnung der allgemeinen Lagrangeschen Störungsrechnung hergeleitet. So wird die Logik deutlich, der ich später bei der Behandlung der Einsteinschen Gravitationsgleichungen folgen werde.

¹⁰ $\vec{f}(\vec{X}, t)$ ist die Trajektorie des Teilchens mit dem Label \vec{X} . Sie wird auch Deformation genannt, da sie die Abweichung der Teilchenposition zur Zeit t von der ursprünglichen Position bei t_0 beschreibt.

2.2.1 Das Lagrange-Newton-System

Im Rahmen der Newtonschen Gravitation bilden die Gleichungen, die nicht-rotierenden, selbstgravitierenden Staub beschreiben, ein geschlossenes System. Im Eulerbild heißt dieses das *Euler-Newton-System* (ENS) und besteht aus den Eulerschen Entwicklungsgleichungen

$$\partial_t \vec{v} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{g} \quad (2.4)$$

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) \quad (2.5)$$

sowie den linearen Newtonschen Feldgleichungen für die Gravitation

$$\nabla \times \vec{g} = \vec{0} \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{g} = \Lambda - 4\pi G\rho \quad (2.7)$$

Mit ρ wird wie üblich die Dichte des Staubs bezeichnet, mit G die Gravitationskonstante und zuletzt mit Λ die kosmologische Konstante. Als Lagrangesche oder materielle Ableitung sei definiert

$$(\dots)^* = \frac{d}{dt} = \partial_t + \vec{v} \cdot \nabla \quad (2.8)$$

Der zweite Term der rechten Seite wird konvektive Ableitung genannt. Er entspricht der zeitlichen Änderung, die ein mit einem Staubteilchen verbundener Beobachter feststellt, und ist deswegen im Allgemeinen auch bei stationären Feldgrößen von Null verschieden.

Wird in den beiden Eulergleichungen (2.4) und (2.5) die Lagrangesche Ableitung eingeführt, dann wird das ENS in Indexnotation¹¹ zu

$$\dot{v}^i = g^i \quad (2.9)$$

$$\dot{\rho} = -\rho v^i{}_{,i} \quad (2.10)$$

$$\delta^{mk} \epsilon_{ijm} g^j{}_{,k} = 0 \quad (2.11)$$

$$g^i{}_{,i} = \Lambda - 4\pi G\rho \quad (2.12)$$

Dabei ist ϵ_{ijk} der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor, definiert durch: a) $\epsilon_{123} = 1$ und b) ϵ_{ijk} wechselt das Vorzeichen unter der Vertauschung von

¹¹ Über doppelt auftretende Indizes $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ wird summiert. Um die Gleichungen übersichtlicher zu gestalten, werden auch in den Abschnitten über Newton-Gravitation oben und unten stehende Indizes formal unterschieden. Gehoben und gesenkt werden sie mit δ^{ij} bzw. δ_{ij} .

jeweils zwei Indizes.¹² Diese acht Gleichungen stellen ein vollständiges System von Gleichungen für die sieben gesuchten Variablen ρ , v^i und g^i dar. Das ENS ist also formal überbestimmt. Über die Einführung eines Potentials $\vec{g} = -\nabla\Phi$ reduzieren sich die vier Feldgleichungen jedoch auf eine Poissongleichung, und das System ist auch formal nicht mehr überbestimmt.

Nun wird der Übergang durchgeführt vom Eulerbild zum Lagrangebild, d.h. zu mit dem Staub mitbewegten Koordinaten. Dann stellt das Feld der Trajektorien $\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}, t)$ die einzige dynamische Variable dar, wobei \vec{X} die Lagrangeschen mitbewegten Koordinaten sind, die zum Anfangszeitpunkt mit den Eulerschen Koordinaten übereinstimmen. Das Feld $\vec{f}(\vec{X}, t)$ misst die Abweichung der Position eines Teilchens zu einem Zeitpunkt t von der Position, die das Teilchen zum Anfangszeitpunkt hatte, und wird daher als Deformationsfeld bezeichnet. Als Deformationsgradient oder *Deformationstensor* wird die partielle Ableitung $f^i_{|j}$ des Deformationsfeldes nach Lagrangekoordinaten bezeichnet.¹³ Er beschreibt die Volumendeformation von Flüssigkeitselementen. Deformationsfeld und -tensor sind die fundamentalen Größen bei der Betrachtung des Systems Staub im Lagrangebild.

Die Umkehrtransformation, d.h. der Übergang von Lagrangeschen zu Eulerschen Koordinaten, sei $\vec{X} = \vec{h}(\vec{x}, t)$. Durch diese Definition von \vec{f} und \vec{h} folgt sofort

$$\dot{f}^i(\vec{X}, t) = v^i(\vec{h}(\vec{x}, t), t) \quad (2.13)$$

Bei Gleichsetzen von träger und schwerer Masse ist Gleichung (2.9) identisch erfüllt, es gilt

$$\ddot{f}^i(\vec{X}, t) = g^i(\vec{h}(\vec{x}, t), t) \quad (2.14)$$

Die im folgenden auftretende *Jacobi-Determinante* der Transformation von Euler- zu Lagrangekoordinaten ist die Funktionaldeterminante

$$J \equiv \det(f^i_{|j}) = \frac{\partial(f^1, f^2, f^3)}{\partial(X^1, X^2, X^3)} = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon^{lmn} f^i_{|l} f^j_{|m} f^k_{|n} \quad (2.15)$$

Sie ist total antisymmetrisch in den Argumenten f^1, f^2, f^3 . Bei der hier verwendeten Wahl der \vec{X} ist weiterhin $J_0(\vec{X}) = 1$, da Euler- und Lagrangekoordinaten am Anfangszeitpunkt ja gerade übereinstimmen sollen.¹⁴

¹² Genauer ist ϵ_{ijk} wie hier definiert eine Tensordichte, was im Newtonschen Fall aber keine Rolle spielt. Zur Klärung der Begriffe Tensor und Tensordichte sei auf den Abschnitt 2.3 verwiesen, der den relativistischen Fall behandelt.

¹³ Partielle Ableitung nach Lagrangeschen Koordinaten wird durch einen senkrechten Strich gekennzeichnet. Ein Komma dagegen bedeutet partielle Ableitung nach Eulerschen Koordinaten.

¹⁴ Im Relativistischen ist das nicht länger der Fall.

Nun lässt sich der Gradient der Umkehrtransformation $h^i_{,j}$ als Funktion des Deformationstensors bestimmen. Mit dessen Hilfe kann eine allgemeine Regel zur Transformation von Vektorgradienten angegeben werden, d.h. zur Transformation partieller Ableitungen nach Eulerkoordinaten zu solchen nach Lagrangekoordinaten. Es ist

$$h^i_{,j} = \frac{1}{2J} \epsilon_{jkl} \epsilon^{imn} f^k_{|m} f^l_{|n} \quad (2.16)$$

Die Transformation eines Tensors der Form $t^i_{,j}$ von Euler- nach Lagrangekoordinaten hat dann die allgemeine Form

$$t^i_{,j} = \frac{1}{2J} \epsilon_{jkl} \mathcal{J}(t^i, f^k, f^l) \quad (2.17)$$

mit der Funktionaldeterminante

$$\mathcal{J}(t^i, f^k, f^l) \equiv \epsilon^{jmn} t^i_{|j} f^k_{|m} f^l_{|n} \quad (2.18)$$

Insbesondere gilt für die Divergenz der Geschwindigkeit

$$v^i_{,i} = \frac{\dot{J}}{J} \quad (2.19)$$

Damit wird die Kontinuitätsgleichung (2.10) zu $0 = J\dot{\rho} + \dot{J}\rho = (J\rho)^{\cdot}$. Sie lässt sich exakt integrieren und ist erfüllt für

$$\rho = \frac{\dot{\rho}}{J} \quad (2.20)$$

wobei $\dot{\rho}(\vec{X})$ das Dichtefeld zum Anfangszeitpunkt ist.

Als Gleichungen für die neuen unabhängigen Variablen f^i bleiben also nur die Newtonschen Gravitationsgleichungen, die Rotationsgleichung (2.11) und die Divergenzgleichung (2.12). Dieses durch den Übergang in mitbewegte Koordinaten entstehende System von Gleichungen wird *Lagrange-Newton-System* (LNS) genannt und nimmt folgende Form an, siehe insbesondere BUCHERT (1992); BUCHERT (1993),

$$\mathcal{J}(\ddot{f}^k, f^k, f^i) = 0 \quad (2.21)$$

$$\mathcal{J}(\ddot{f}^1, f^2, f^3) + \text{cycl.} = \Lambda J - 4\pi G \dot{\rho} \quad (2.22)$$

wobei die Feldgleichungen des Eulerbildes zu Lagrangeschen Entwicklungs-

gleichungen für das Deformationsfeld werden.¹⁵ Hier steht \mathcal{J} analog zur Jacobideterminante (2.15) für die Funktionaldeterminante der in den Klammern angegebenen Größen. Dabei wurde die Umkehrbarkeit der Transformation vorausgesetzt, d.h. $J \neq 0$. Wie schon das ENS ist auch dieses System formal überbestimmt, es beinhaltet vier Gleichungen für die drei unabhängigen Variablen f^i .

Das Lagrange-Newton-Cartan-System

Nun soll das Lagrange-Newton-System mit Hilfe von Differentialformen angegeben werden. Eine Einführung der hier benötigten Begriffe in der Sprache der Differentialformen findet sich in Anhang A. Dieser Formalismus ist nicht nur sehr elegant, sondern vereinfacht einige Rechnungen auch erheblich. Die insgesamt vier Gleichungen des LNS können geschrieben werden als, siehe EHLERS und BUCHERT (1997),

$$\delta_{ij} \mathbf{d}\ddot{f}^i \wedge \mathbf{d}f^j = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \mathbf{d}\ddot{f}^i \wedge \mathbf{d}f^j \wedge \mathbf{d}f^k = \left(\Lambda - 4\pi G \frac{\rho_0}{J} \right) \mathbf{d}^3 f \quad (2.24)$$

Dieses System von Gleichungen sei als *Lagrange-Newton-Cartan-System* (LN-CS) bezeichnet. Der etwas umständliche Name ist mit Blick auf die nächsten Kapitel so gewählt, denn die exakten Formen $\mathbf{d}f^i$ sind nur der Spezialfall für einen Euklidischen Raum in einem allgemeineren Cartan-Formalismus, in dem die Basis-Einsformen im Allgemeinen nicht exakt sind. Der Fall exakter Basisformen $\mathbf{d}f^i$ wird gerade den Newtonschen Grenzfall definieren.

Formulierung mit dem Gezeitentensor

Eine alternative, sehr elegante Darstellung des Lagrange-Newton-Systems kann mit Hilfe des Newtonschen Gezeitentensors \mathcal{E}_{ij} gegeben werden. Zunächst wird der Gradient der Eulerschen Gleichung (2.9) gebildet, was zu folgender Gleichung führt,

$$(v_{i,j})^\cdot = -v_{i,k} v^k_{,j} + g_{i,j} \quad (2.25)$$

Dabei ist es üblich, den Geschwindigkeitsgradienten $v_{i,j}$ durch

$$v_{i,j} = \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} + \sigma_{ij} + \omega_{ij} \quad (2.26)$$

in seinen antisymmetrischen (Rotationstensor ω_{ij}) und seinen symmetrischen

¹⁵ Zu alternativen Formulierungen sowie weiteren Details siehe neben den folgenden Abschnitten auch EHLERS und BUCHERT (1997).

Teil aufzuspalten, letzteren wiederum in Spurteil (Expansionsrate θ) und spurfreien Teil (Scherungstensor σ_{ij}). Werden (2.26) und die Quellen mithilfe des ENS in obige Gleichung eingesetzt, so entsteht ein System von Entwicklungsgleichungen für die einzelnen Teile, nämlich

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 + 2(\omega^2 - \sigma^2) + \Lambda - 4\pi G\rho \quad (2.27)$$

$$(\omega_{ij})^\cdot = -\frac{2}{3}\theta\omega_{ij} + \omega_{jk}\sigma^k_i - \omega_{ik}\sigma^k_j \quad (2.28)$$

$$(\sigma_{ij})^\cdot = -\frac{2}{3}\theta\sigma_{ij} - \sigma_{ik}\sigma^k_j - \omega_{ik}\omega^k_j + \frac{2}{3}(\sigma^2 - \omega^2)\delta_{ij} + \mathcal{E}_{(ij)} \quad (2.29)$$

Gleichung (2.27) ist bekannt als *Raychaudhuri-Gleichung* und ist äquivalent zur Divergenzgleichung (2.12) des ENS, die *Helmholtzsche Transportgleichung* (2.28) ist äquivalent zur Rotationsgleichung (2.11), beides unter der Voraussetzung, dass die Eulersche Gleichung $\dot{v}^i = g^i$ gilt.¹⁶ In Lagrangesche Koordinaten transformiert ergeben sie gerade das vollständige LNS (2.21) und (2.22). In (2.29) wurde der Gezeitentensor \mathcal{E}_{ij} eingeführt. Er stellt den spurfreien Teil des Beschleunigungsgradienten $g_{i,j}$ dar, also

$$\mathcal{E}_{ij} \equiv g_{i,j} - \frac{1}{3}g^k_{,k}\delta_{ij} \quad (2.30)$$

Eine alternative Beschreibung des LNS ergibt sich nun bei genauerer Betrachtung des Gezeitentensors. Werden nämlich sein antisymmetrischer Teil $\mathcal{E}_{[ij]} = g_{[i,j]}$ und seine Spur $\mathcal{E}^k_k = g^k_{,k} - (\Lambda - 4\pi G\rho)$ gebildet, so wird deutlich, dass die Bedingung für deren Verschwinden äquivalent ist zur Gültigkeit von (2.11) und (2.12) und damit zunächst des ENS.

Im Lagrangebild nimmt der Gezeitentensor die Form

$$\mathcal{E}^i_j = \frac{1}{2J}\epsilon_{jkl}\mathcal{J}(\ddot{f}^i, f^k, f^l) - \frac{1}{3}\left(\Lambda - 4\pi G\frac{\rho_0}{J}\right)\delta^i_j \quad (2.31)$$

an. Es gilt daher das zum Lagrange-Newton-System äquivalente Gleichungssystem, siehe EHLERS und BUCHERT (2009),

$$\mathcal{E}_{[ij]} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (2.21) \quad \text{und} \quad \mathcal{E}^k_k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (2.22) \quad (2.32)$$

Nun kann an dieser Stelle wieder zur Schreibweise mit Differentialformen übergegangen werden. Dazu werden neue Einsformen eingeführt, indem der Gezeitentensor (2.30) als deren Komponentenmatrix aufgefasst wird. Die so

¹⁶ Im Fall nichtrotierenden Staubs ist natürlich $\omega_{ij} = 0$.

entstehenden *Gezeitenformen* sind definiert als

$$\mathcal{E}^i \equiv \mathcal{E}^i_j \mathbf{d}x^j \quad (2.33)$$

Bei dieser Definition wird $\mathbf{d}x^i$ und nicht $\mathbf{d}X^i$ verwendet, da \mathcal{E}^i_j zunächst eine Größe im Eulerbild darstellt. Wird nun der Lagrangesche Ausdruck (2.31) für \mathcal{E}^i_j eingesetzt, ergibt sich mit $\ddot{f}^i_j \mathbf{d}f^j = \mathbf{d}\ddot{f}^i$ für die Gezeitenformen

$$\mathcal{E}^i = \mathbf{d}\ddot{f}^i - \frac{1}{3} (\Lambda - 4\pi G\rho) \mathbf{d}f^i \quad (2.34)$$

Das zum Lagrange-Newton-Cartan-System äquivalente System von Gleichungen für die Gezeitenform lautet damit, siehe BUCHERT und OSTERMANN (2012), und Referenzen darin,

$$\delta_{ij} \mathcal{E}^i \wedge \mathbf{d}f^j = 0 \quad (2.35)$$

$$\epsilon_{ijk} \mathcal{E}^i \wedge \mathbf{d}f^j \wedge \mathbf{d}f^k = 0 \quad (2.36)$$

2.2.2 Die Zel'dovich-Approximation

In diesem Abschnitt soll die logische Struktur der Zel'dovich-Approximation innerhalb der Newtonschen Kosmologie knapp wiedergegeben werden. Aufbauend auf dieser Logik wird die Vorgehensweise im allgemeinrelativistischen Fall sehr ähnlich sein, was zu einer klaren und vielversprechenden Definition der relativistischen Zel'dovich-Approximation führen wird. Dazu wird insbesondere Zel'dovichs ursprüngliche Idee der Extrapolation zu Störungen höherer als erster Ordnung betrachtet. Für eine kompakte, sehr schöne Übersicht über die wesentlichen Gleichungen, aber auch die verschiedenen Zugänge zur Lagrangeschen Störungsrechnung siehe BUCHERT (2006)(2).

Zunächst wird das Störungsschema erster Ordnung bestimmt, indem das Lagrange-Newton-System, d.h. Gleichungen (2.21) und (2.22), für das Deformationsfeld als einziger dynamischer Variable linearisiert werden. Dazu wird angenommen, dass das Deformationsfeld \vec{f} die Überlagerung einer homogenen und isotropen Hintergrunddeformation $\vec{f}_H(\vec{X}, t) = a(t)\vec{X}$ mit einem inhomogenen Deformationsfeld $\vec{p}(\vec{X}, t)$ sei, d.h.

$$\vec{f}(\vec{X}, t) = a(t)\vec{X} + \vec{p}(\vec{X}, t) \quad (2.37)$$

Wie üblich wurde hier vorausgesetzt, dass zur Anfangszeit $a(t_0) = 1$ und $\vec{p}(\vec{X}, t_0) = 0$.

Manchmal ist es zur Beschreibung von Bewegungen in einem mit dem

Hintergrund bewegten Koordinatensystem \vec{q} zudem nützlich, das skalierte Deformationsfeld einzuführen,

$$\vec{q} = \vec{F}(\vec{X}, t) \equiv \frac{1}{a(t)} \vec{f}(\vec{X}, t) \quad (2.38)$$

Analog kann das skalierte Störungsfeld $\vec{P}(\vec{X}, t) \equiv \vec{p}(\vec{X}, t)/a(t)$ definiert werden, womit das Deformationsfeld die Form $\vec{f}(\vec{X}, t) = a(t)[\vec{X} + \vec{P}(\vec{X}, t)]$ annimmt. Diese zweite Definition werde ich im relativistischen Fall benutzen. In diesem Abschnitt werden die resultierenden Gleichungen und ihre Lösungen für beide Fälle angegeben.

Die homogene und isotrope Hintergrunddeformation für sich löst das Lagrange-Newton-System. Integriert ergibt sich die Friedmann-Gleichung

$$H^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_H + \Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (2.39)$$

mit der homogenen Hintergrunddichte $\rho_H = \dot{\rho}_H a^{-3}$ und einer Integrationskonstanten k , die im Folgenden gleich Null gesetzt wird.

Das zu lösende Gleichungssystem wird in erster Ordnung zu

$$\nabla_0 \times \ddot{\vec{p}} - \frac{\ddot{a}}{a} \nabla_0 \times \vec{p} = \vec{0} \quad (2.40)$$

$$\nabla_0 \cdot \ddot{\vec{p}} + \left(2\frac{\ddot{a}}{a} - \Lambda\right) \nabla_0 \cdot \vec{p} = -\frac{1}{a^2} 4\pi G (\dot{\rho} - \dot{\rho}_H) \quad (2.41)$$

Dabei wird mit ∇_0 die Ableitung nach Lagrangeschen Koordinaten bezeichnet. Der Quellterm in (2.41) kann mit Hilfe der Feldgleichungen (2.6) und (2.7), ausgewertet zum Zeitpunkt t_0 , durch die Divergenz der anfänglichen Störung der Feldstärke $\ddot{\vec{p}}(t_0)$ ausgedrückt werden. Weiter werde das Störungsfeld \vec{p} in einen longitudinalen Beitrag \vec{p}^L und einen transversalen Beitrag \vec{p}^T aufgespalten. Die für den transversalen (divergenzfreien) Teil resultierenden Gleichungen sind dann

$$\ddot{\vec{p}}^T - \frac{\ddot{a}}{a} \vec{p}^T = \vec{0} \quad (2.42)$$

und der longitudinale (rotationsfreie) Teil gehorcht der Gleichung

$$\ddot{\vec{p}}^L + \left(2\frac{\ddot{a}}{a} - \Lambda\right) \vec{p}^L = \frac{1}{a^2} \ddot{\vec{p}}^L(t_0) \quad (2.43)$$

Eine detaillierte Herleitung sowie die allgemeine Lösung zu diesen Gleichungen findet sich in BUCHERT (1992). An dieser Stelle sei auch auf EHLERS und

BUCHERT (1997) verwiesen, wo sich die allgemeine Gleichung und Lösungsansätze für Störungen beliebiger Ordnung finden.

Die bekannte Zel'dovich-Approximation wird nun als Spezialfall der allgemeinen Lösung gefunden, indem die Pekuliargeschwindigkeit $\vec{u}(\vec{X}, t)$ und die Pekuliarbeschleunigung $\vec{w}(\vec{X}, t)$ durch die so genannte „*slaving condition*“

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{w}(\vec{X}, t) t \quad \text{bei} \quad t = t_0 \quad (2.44)$$

eingeschränkt werden. Im hier verwendeten Fall verschwindender Anfangsstörung bedeutet diese Einschränkung

$$\vec{u} = \dot{\vec{p}} = a\ddot{\vec{P}} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \dot{\vec{u}} + H\vec{u} = \ddot{\vec{p}} = 2\dot{a}\dot{\vec{P}} + a\ddot{\vec{P}} \quad (2.45)$$

Die Einschränkung (2.44) gilt dann für alle Zeiten t . Zur Anfangszeit t_0 sind also folgende Bedingungen gegeben,

$$\dot{\vec{p}}^T(\vec{X}, t_0) = \ddot{\vec{p}}^T(\vec{X}, t_0) t_0 = \vec{0} \quad (2.46)$$

$$\dot{\vec{p}}^L(\vec{X}, t_0) = \ddot{\vec{p}}^L(\vec{X}, t_0) t_0 \quad (2.47)$$

Unter dieser Einschränkung wird die allgemeine Lösung (2.38, 2.37) zur bekannten Zel'dovich-Näherung. Im Fall eines flachen Hintergrundes ($k = 0$ und $\Lambda = 0$) lautet diese

$$^{\text{NZA}}\vec{F}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \dot{\vec{p}}^L(\vec{X}, t_0) t_0 \quad (2.48)$$

Für einen anderen, allgemeinen Hintergrund, der einen Term konstanter Krümmung sowie die kosmologische Konstante enthält, siehe BILDHAUER, BUCHERT und KASAI (1992).

Wie im Abschnitt 2.5 über die Definition der relativistischen Näherung ausführlicher besprochen wird, schlug Zel'dovich an dieser Stelle die Extrapolation dieses Deformationsfeldes in den inhomogenen Bereich vor. Die nicht-linear entwickelte Dichte kann dann gemäß

$$^{\text{NZA}}\rho = \frac{\rho_H(t)}{\rho_H(t_0)} \dot{\rho}(\vec{X}) / ^{\text{NZA}}J_F(\vec{X}, t) \quad (2.49)$$

exakt berechnet werden, d.h. sie ist anfänglich gegeben durch $\dot{\rho}(\vec{X})$ und entwickelt sich durch Geschwindigkeitsstörungen, wobei die Transformationsdeterminante $J_F(\vec{X}, t) \equiv \det(F^i_j)$ für das mitbewegte Deformationsfeld (2.48)

bestimmt wird. Zel'dovichs Ansatz war, dass dieser Ausdruck für die Dichte auf der einen Seite, wenn er im Bezug zum Hintergrund linearisiert wird, mit der linearisierten Lösung für die Dichte in mitbewegten Eulerschen Koordinaten \vec{q} gerade übereinstimmt. Auf der anderen Seite ist er in seiner nichtlinearen Form dazu in der Lage, ein Kontinuum zu beschreiben, welches in einer endlichen Zeit Kaustiken entwickelt, ähnlich der geradlinigen Bewegung eines trägen Kontinuums, vgl. ZEL'DOVICH und MYSHKIS (1973). Eine weiterführende Diskussion, diesen Extrapolationsansatz betreffend, findet sich z.B. in BUCHERT (1989).

Wird nun das Störungsfeld relativ zum Hintergrund betrachtet, dann werden die Gleichungen (2.42), (2.43) mit $\dot{\vec{p}} = \dot{a}\vec{P} + a\ddot{\vec{P}}$ und $\ddot{\vec{p}} = \ddot{a}\vec{P} + 2\dot{a}\dot{\vec{P}} + a\ddot{\vec{P}}$ zu

$$\ddot{\vec{P}}^T + 2H\dot{\vec{P}}^T = \vec{0} \quad (2.50)$$

$$\ddot{\vec{P}}^L + 2H\dot{\vec{P}}^L - 4\pi G\rho_H\vec{P}^L = \frac{1}{a^3}\vec{W}(\vec{X}) \quad (2.51)$$

wobei $\vec{W}(\vec{X}) \equiv \ddot{\vec{P}}^L(\vec{X}, t_0) + 2H\dot{\vec{P}}^L(\vec{X}, t_0)$ das pekuliare Beschleunigungsfeld zum Anfangszeitpunkt darstellt. Eine alternative Formulierung zu (2.51) ist

$$\ddot{\vec{P}}^L + 2H\dot{\vec{P}}^L + 3\frac{\ddot{a}}{a}\vec{P}^L = \frac{1}{a^3}\vec{W}(\vec{X}) \quad (2.52)$$

Die Einschränkungen (2.46) und (2.47) nehmen dann folgende Form an,

$$\dot{\vec{P}}^T(\vec{X}, t_0) = -3\ddot{\vec{P}}^T(\vec{X}, t_0)t_0 = \vec{0} \quad (2.53)$$

$$\dot{\vec{P}}^L(\vec{X}, t_0) = -3\ddot{\vec{P}}^L(\vec{X}, t_0)t_0 \quad (2.54)$$

Die Zel'dovich-Approximation selber ändert ihre Form durch den Übergang von $\vec{p}(\vec{X}, t)$ zu $\vec{P}(\vec{X}, t)$ wegen $\dot{\vec{P}}(\vec{X}, t_0) = \dot{\vec{p}}(\vec{X}, t_0)$ nicht, was auch durch explizites Lösen der obigen Gleichungen gezeigt werden kann, also

$${}^{\text{NZA}}\vec{F}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \dot{\vec{P}}^L(\vec{X}, t_0)t_0 \quad (2.55)$$

Zusammenfassung

An dieser Stelle sei knapp die logische Struktur der Herleitung der Zel'dovich-Näherung zusammengefasst, wie sie in BUCHERT und OSTERMANN (2012) gegeben ist. Erstens, das grundlegende System an Gleichungen lässt sich darstellen als geschlossenes Gleichungssystem für eine einzige dynamische

Variable, das Deformationsfeld bzw. den Deformationsgradienten. Zweitens, das sich zeitlich entwickelnde Deformationsfeld wird aufgeteilt in eine Hintergrunddeformation, den so genannten „*Hubble flow*“, sowie ein Abweichungsfeld, welches die zeitliche Entwicklung der anfänglichen Störungen beinhaltet. Drittens, das Deformationsfeld, und nur dieses Feld, wird linearisiert, im Gegensatz zur Eulerschen Störungsrechnung, wo auch die Dichteschwankungen linearisiert werden. Viertens, dynamische und kinematische Größen wie das Dichtefeld werden als Funktionale des (linearisierten) Deformationsfeldes exakt aus diesem berechnet und stellen so nichtlineare Größen dar, die in den schwach nichtlinearen Bereich extrapoliert sind, d.h. bis zu einem Bereich, in dem die Rücktransformation aus dem Lagrangebild in das Eulerbild nicht mehr möglich ist („*Shell Crossing*“).

Zuletzt ist erwähnenswert, dass die Einschränkung der Anfangsdaten wie bei Zel’dovich nicht notwendig ist, so dass die hier zusammengefassten Ideen gleichfalls als Rezept zur Extrapolation der allgemeinen Lösung der ersten Ordnung Störungsrechnung verstanden werden können, z.B. ist das Funktional, welches Wirbelzustände beschreibt, durch Cauchys exaktes Integral gegeben (BUCHERT [1992]),

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\Omega} \cdot \nabla_0 \vec{F}}{a^2 J_F} \quad ; \quad \vec{\Omega} \equiv \vec{\omega}(\vec{X}, t_0) \quad (2.56)$$

2.3 Die Einsteingleichungen im Lagrangebild

In diesem Abschnitt wird das Coframe-Feld eingeführt, das die Erweiterung des Lagrangeschen Deformationsgradienten der Newtonschen Kosmologie auf den relativistischen Fall darstellt. Wie dort wird es auch hier die einzige dynamische Variable in einem Satz an Entwicklungs- und Bedingungsgleichungen sein.

Im allgemeinrelativistischen Fall stellt der Deformationsgradient allerdings nicht länger eine exakte Basis dar, d.h. anstelle von $dx^a = f^a_{|i} dX^i$ wird eine nichtexakte Basis $\boldsymbol{\eta}^a = \eta^a_i dX^i$ betrachtet.¹⁷ Dabei wird die Größe η^a_i als Cartansches Coframe-Feld, kurz Coframe, bezeichnet. Sie beschreibt die

¹⁷ In der vorliegenden Arbeit werden lateinische Buchstaben a, b, c, \dots benutzt, um Indizes in der Nichtkoordinaten-Basis zu zählen, i, j, k, \dots stehen entsprechend für zur Koordinatenbasis gehörende Indizes in drei Dimensionen. Die zur Lagrangeschen 3-Metrik gehörende kovariante Ableitung wird mit \parallel bezeichnet, während die entsprechende partielle Ableitung durch $|$ ausgedrückt wird. Griechische Buchstaben $\kappa, \lambda, \mu, \dots$ werden wie üblich im vierdimensionalen Fall verwendet, zusammen mit $;$ für die kovariante sowie $,$ für die partielle Ableitung.

Transformation von der Koordinaten- in die Nichtkoordinatenbasis. Wo für die Beschreibung des Newtonschen Deformationsfeldes noch drei Gleichungen ausreichen, hat das Coframe-Feld neun Komponenten. Es müssen also, ausgehend von den Einsteingleichungen, beim Übergang in Lagrangesche mitbewegte Koordinaten neun Entwicklungsgleichungen gefunden werden. Wie weiterhin gezeigt wird, ist der Newtonsche Grenzfall der relativistischen Gleichungen gerade der geometrische Grenzwert exakter Basis-Einsformen.¹⁸

Die Beschreibung der Allgemeinen Relativitätstheorie durch Coframes oder ihre Inversen, den Triaden (dreidimensional) bzw. Tetraden (vierdimensional), wird häufig im Zusammenhang mit Quantengravitation, schwarzen Löchern und Gravitationswellen eingesetzt. Sie wurde schon 1928 als „fernparallele Theorie der Gravitation“ von Albert Einstein in die Physik eingeführt, siehe dazu EINSTEIN (1928). Ihre mathematischen Grundlagen legte Élie Cartan in den frühen Zwanzigerjahren (CARTAN [1923]; CARTAN [1924]; CARTAN [1925]). Berühmt ist der Briefwechsel zwischen Einstein und Cartan über diese Theorie in den Jahren von 1929 bis 1932, zu finden in DEVEVER (1979). Die fernparallele Theorie der Gravitation arbeitet in Nicht-Koordinatenbasen und wird heute „Teleparallel Gravity“ oder „Tetrad Gravity“ genannt, siehe dazu ANDRADE, GUILLEN und PEREIRA (2000); ITIN (2001); LUSANNA und RUSSO (2002), und Referenzen darin. In ihrem Rahmen lassen sich Abweichungen von der Riemannschen Geometrie wie Nicht-metrischität, $g_{\mu\nu;\kappa} \neq 0$, oder Torsion leichter berücksichtigen als in Einsteins Formulierung in Koordinatenbasen; zu einem solchen kosmologischen Modell siehe z.B. PUETZFELD (2002)(1), PUETZFELD (2002)(2) sowie PUETZFELD und TRESGUERRES (2001). Zu Fragen von Integrabilität und Bedingungsgleichungen in der Kosmologie siehe CLAYTON (1997) und MACCALLUM (1998).

Zu einem weiteren ausgesprochen interessanten Konzept führt die Betrachtung des von Hermann Weyl eingeführten und nach ihm benannten konformen Krümmungstensors. Seit PENROSE (1979) den Weyltensor mit der gravitativen Entropie in Verbindung gebracht hat, wächst das Interesse an dessen Rolle in der Kosmologie. Der Weyltensor ist der spurfreie Teil des Riemannschen Krümmungstensors,

$$C^{\mu\nu}_{\kappa\lambda} \equiv R^{\mu\nu}_{\kappa\lambda} - 2\delta^{[\mu}_{[\kappa} R^{\nu]}_{\lambda]} + \frac{1}{3}\delta^{[\mu}_{[\kappa} \delta^{\nu]}_{\lambda]} R \quad (2.57)$$

und hat die gleichen Symmetrieeigenschaften wie dieser, siehe dazu MISNER, THORNE und WHEELER (1973). Er kann mit obiger Formel aus den Lösun-

¹⁸ Eine kurze Einleitung zu Differentialformen findet sich im Anhang A, ausführlicher z.B. in STRAUMANN (1984).

gen der Einsteinschen Feldgleichungen für den metrischen Tensor berechnet werden. Der Weyltensor selbst hat zehn unabhängige Komponenten, er kann durch

$$E_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} C^{\rho\kappa}_{\nu\lambda} u_\kappa u^\lambda \quad \text{und} \quad H_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\rho} C^{\kappa\lambda}_{\nu\sigma} u^\rho u^\sigma \quad (2.58)$$

in einen elektrischen Teil $E_{\mu\nu}$ und einen magnetischen Teil $H_{\mu\nu}$ aufgespalten werden, die symmetrisch und spurfrei sind und daher jeweils fünf unabhängige Komponenten haben. Die beiden Teile hängen, anders als der Weyltensor selbst, über die Vierer-Geschwindigkeit der Materie u^μ vom gewählten Bezugssystem ab. In Analogie zur Elektrodynamik sind der elektrische und der magnetische Teil durch eine Koordinatentransformation miteinander verbunden. Ein System von Entwicklungs- und Bedingungsgleichungen für die beiden Teile, das den Einsteingleichungen äquivalent ist, wird z.B. in BERTSCHINGER und HAMILTON (1994) sowie ELLIS und DUNSBY (1997) gegeben. Der elektrische Teil repräsentiert die Gezeitenkräfte der Gravitation, sein Newtonsches Analogon ist der Gezeitentensor, siehe dazu EHLERS und BUCHERT (2009). Der magnetische Teil hat kein Analogon in der Newtonschen Theorie und gibt u.a. den Beitrag rotierender Materie zur Raumgeometrie wieder (FODOR, MARKLUND und PERJÉS [1999]).

Die Vermutung von Penrose, dass der Weyltensor und das Konzept einer Entropie der Gravitation verknüpft sind, ist ein aktuelles Forschungsgebiet und wird gründlich untersucht (BARROW und HERVIK [2002]; RUDJORD, GRØN und HERVIK [2008]). Penrose schlug vor, den Weyltensor als Maß für die Inhomogenität in den verschiedenen Modellen für das Universum zu verwenden. Ob der Weyltensor selbst als „Entropie der Gravitation“ in der Entwicklung des Universums bezeichnet werden kann, oder ob seine Invariante

$$P^2 = \frac{C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta}}{R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}} \quad (2.59)$$

wegen der steigenden Entropie ein Entropie-ähnliches Verhalten zeigt, ist noch nicht geklärt. Insbesondere kann der Weyltensor mit dem Übergang von Gleichgewichtszuständen zu Nicht-Gleichgewichtszuständen in Verbindung gebracht werden (HERRERA [2003]). Zu einer anderen möglichen Definition einer Entropie, welche die Gravitation einschließt, der Informationsentropie, siehe HOSOYA, BUCHERT und MORITA (2004).

2.3.1 Das Lagrange-Einstein-System (LES)

In diesem Abschnitt soll der Raum-Zeit-Split in mitbewegten Koordinaten, sogenannten Gauss-Normalkoordinaten, beschrieben werden. Ganz analog zum Newtonschen Fall wird hier synonym die Bezeichnung Lagrangekoordinaten verwendet. Dieser (3+1)-Split führt zu einer dreidimensionalen Formulierung der ursprünglich vierdimensionalen Einsteingleichungen, deren einzige dynamische Variablen die beschriebenen Coframes sind.

Der Raum-Zeit-Split

Es werde eine Foliation der Raumzeit in Hyperflächen senkrecht zum Fluss betrachtet mit der 3-Metrik g_{ij} und mit dem mitbewegten und synchronen Linienelement

$$^{(4)}\mathbf{g} = -dt^2 + {}^{(3)}\mathbf{g} dX^i \otimes dX^j \quad (2.60)$$

in dem die X^i als (Lagrangesche) mitbewegte Koordinaten entlang der Fluslinien (Geodäten) konstant sind. Es ist $u^\mu = (1, \vec{0})$.¹⁹

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bilden die Einsteingleichungen in vier Dimensionen²⁰

$$^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} {}^{(4)}g_{\mu\nu} {}^{(4)}R + \Lambda {}^{(4)}g_{\mu\nu} = 8\pi G {}^{(4)}T_{\mu\nu} \quad (2.61)$$

mit dem Energie-Impuls-Tensor für nichtrotierenden Staub ${}^{(4)}T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$. Dabei ist wie üblich G die Gravitationskonstante, Λ die kosmologische Konstante und ρ die Dichte. Die Vierer-Geschwindigkeit u^μ ist normalisiert zu $u^\mu u_\mu = -1$. Durch Einsetzen der Kontraktion von (2.61), ${}^{(4)}R = 8\pi G\rho + 4\Lambda$, entsteht folgende alternative Formulierung der Einsteingleichungen,

$$^{(4)}R_{\mu\nu} = 8\pi G\rho \left(u_\mu u_\nu + \frac{1}{2} {}^{(4)}g_{\mu\nu} \right) + \Lambda {}^{(4)}g_{\mu\nu} \quad (2.62)$$

In Lagrangekoordinaten ist die Vierer-Geschwindigkeit $u_\mu = (-1, 0, 0, 0)$ und der metrische Tensor nimmt die einfache Form ${}^{(4)}g_{00} = -1$, ${}^{(4)}g_{0i} = 0$ und ${}^{(4)}g_{ij} = {}^{(3)}g_{ij} = g_{ij}$ an.

Allgemein wird der Raum-Zeit-Split durch Anwenden der Gauss-Codazzi-Gleichungen vollzogen, die den vierdimensionalen Riemanntensor in einen

¹⁹ Die Ableitung nach der Eigenzeit wird als $\frac{\partial}{\partial t} = u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ geschrieben, in drei Dimensionen kurz als $\dot{}$.

²⁰ In diesem Abschnitt werden vierdimensionale Größen mit einem vorgestellten ${}^{(4)}$ gekennzeichnet, während dreidimensionale Größen kein Label tragen. Vierdimensionale Größen, bei denen keine Verwechslungsgefahr besteht, tragen kein Label, so etwa u^μ .

von der dreidimensionalen räumlichen, d.h. inneren Krümmung abhängigen Term sowie weitere Terme spalten, die die äußere Krümmung wiedergeben (ARNOWITT, DESER und MISNER [1962]; ELLIS [1971]; MISNER, THORNE und WHEELER [1973]; ELLIS [2009]). Diese Prozedur vereinfacht sich stark beim Verwenden von von Gauss-Normalkoordinaten, so dass der Split elementar durchgeführt werden kann, zu Details siehe OSTERMANN (2003).

In der gewählten Foliation ist die äußere Krümmung wie üblich beschrieben durch die Zeitableitung der räumlichen 3-Metrik,

$$\mathcal{K}_{ij} = -\frac{1}{2}\dot{g}_{ij} \quad (2.63)$$

Im Folgenden wird diese symmetrische Größe durch den allgemeineren Expansionstensor ersetzt, der vierdimensional durch $\Theta^\mu{}_\nu \equiv u^\mu{}_{;\nu}$ definiert ist. Es ist leicht zu sehen, dass sein symmetrischer Anteil gerade das Negative der äußeren Krümmung ist, $\Theta_{(ij)} = -\mathcal{K}_{ij}$. So kann die äußere Krümmung in den Gleichungen durch den Expansionstensor ersetzt werden, während gleichzeitig die Symmetriebedingung $\Theta_{[ij]} = 0$ als zusätzliche Gleichung auftritt.

Im mitbewegten Bezugssystem nehmen die Einsteingleichungen dann die von ARNOWITT, DESER und MISNER (1962) eingeführte und als ADM-Gleichungen bekannte Form an, siehe dazu auch MISNER, THORNE und WHEELER (1973). Diese bestehen aus den Entwicklungsgleichungen

$$\dot{\varrho} + \Theta \varrho = 0 \quad (2.64)$$

$$\dot{\Theta}^i{}_j + \Theta \Theta^i{}_j = (4\pi G \varrho + \Lambda) \delta^i{}_j - R^i{}_j \quad (2.65)$$

wobei $R^i{}_j$ der Riccitenor bezüglich der 3-Metrik ist und mit ϱ das Dichtefeld für Staub bezeichnet ist, komplettiert von den Bedingungsgleichungen

$$\Theta_{ij} - \Theta_{ji} = 0 \quad (2.66)$$

$$R + \Theta^2 - \Theta^k{}_l \Theta^l{}_k = 16\pi G \varrho + 2\Lambda \quad (2.67)$$

$$\Theta^k{}_{i||k} - \Theta_{||i} = 0 \quad (2.68)$$

Die beiden letzten Gleichungen stellen die Hamiltonbedingung bzw. die Impulsbedingungen dar. Im (3+1)-Split kommutiert das Heben und Senken von Indizes nicht mehr mit der Zeitableitung, es kann aber mit Hilfe der Definition des Expansionstensors eine Relation dafür gefunden werden. So gilt für jeden Tensor $T^i{}_j$ die Beziehung

$$\dot{T}^i{}_j = (g_{ik} T^k{}_j)^\cdot = g_{ik} \dot{T}^k{}_j + 2\Theta_{ik} T^k{}_j \quad (2.69)$$

Auf dieselbe Weise kommutieren auch kovariante Ableitung und Zeitableitung nicht. Um damit umgehen zu können, habe ich folgende nützliche Beziehung hergeleitet,

$$\dot{\Gamma}^i_{kl} = \Theta^i_{k||l} + \Theta^i_{l||k} - g^{im}\Theta_{kl||m} \quad (2.70)$$

Damit kann der Riccitenor, oder präziser, seine zeitliche Ableitung, durch den Expansionstensor ausgedrückt werden. Es ist

$$\dot{R}_{ij} = \Theta^k_{i||j||k} + \Theta^k_{j||i||k} - \Theta_{ij}{}^{||k}{}_{||k} - \Theta_{||i||j} \quad (2.71)$$

So kann (2.65) geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \ddot{\Theta}^i_j + \dot{\Theta}\Theta^i_j + \Theta\dot{\Theta}^i_j + 2\Theta^i_k\dot{\Theta}^k_j + 2\Theta\Theta^i_k\Theta^k_j \\ = \Theta^i{}^{||k}{}_{||k} + \Theta^{||i}{}_{||j} - \Theta^k_{j||k}{}^i - \Theta^i{}^{||k}{}_{||j} + 2(4\pi G\rho + \Lambda)\Theta^i_j - 4\pi G\rho\Theta\delta^i_j \end{aligned} \quad (2.72)$$

Es ist deutlich zu sehen, dass diese Gleichung trotz ihrer schwer zu lesenden Form den entscheidenden Vorteil hat, abgesehen von der exakt integrierbaren Quelle ρ ausschließlich aus Termen zu bestehen, die aus dem Expansionstensor und seinen zeitlichen und räumlichen Ableitungen aufgebaut sind. Eine einfachere Formulierung kann gegeben werden, nachdem im nächsten Abschnitt der Weyltensor eingeführt wurde.

An dieser Stelle sei bereits angemerkt, dass die Spur des Expansionstensors durch $\Theta = \dot{J}/J$ ausgedrückt werden kann,²¹ so dass die Kontinuitätsgleichung (2.64) auch im relativistischen Fall durch Integration gelöst werden kann. Das exakte Integral wird zu

$$\rho = \dot{\rho} \frac{\dot{J}}{J} \quad (2.73)$$

Eine interessante Folge der Impulsbedingungen (2.68) ist $g^{kl}\dot{R}_{kl} = 0$, wodurch mit (2.69) die Entwicklung des Krümmungsskalars durch Expansions- und Riccitenor beschrieben werden kann,

$$\dot{R} = -2\Theta^k_l R^l_k \quad (2.74)$$

²¹ J ist dabei wie im Newtonschen Fall die Jacobideterminante der Transformation in mitbewegte Koordinaten, zu Details siehe den folgenden Abschnitt.

Cartans Coframes

Durch das Einführen von Cartans Coframes $\boldsymbol{\eta}^a$, die eine Nichtkoordinaten-Basis im dreidimensionalen Raum bilden, kann der räumliche Teil der allgemeinen vierdimensionalen Metrik (2.60), d.h. die 3-Metrik $^{(3)}\mathbf{g}$, als quadratische Form dieser Basis geschrieben werden,

$$^{(3)}\mathbf{g} = \delta_{ab} \boldsymbol{\eta}^a \otimes \boldsymbol{\eta}^b \quad (2.75)$$

Nichtkoordinaten-Indizes werden mit δ_{ab} gesenkt und mit δ^{ab} gehoben. Durch diese Wahl ist festgelegt, dass alle Informationen über die Anfangsdaten im Anfangs-Coframe liegen müssen, d.h. $\eta_i^a(t_0) = \dot{\eta}_i^a$.²² Ausgedrückt in Tensor-schreibweise ist die 3-Metrik dann

$$g_{ij} = \delta_{ab} \eta_i^a \eta_j^b \quad (2.76)$$

Um die Determinante der Transformation von der Koordinaten- in die Nichtkoordinaten-Basis durch die Coframes ausdrücken zu können, sei wie üblich die total antisymmetrische Levi-Civita-Tensordichte definiert durch ihre Eigenschaften i) $\epsilon_{i_1 i_2 i_3} = (-1)^P$, wobei P das Vorzeichen der Permutation $(1, 2, 3) \rightarrow (i_1 i_2 i_3)$ ist und ii) $\epsilon_{i_1 i_2 i_3} = 0$, falls zwei Indizes übereinstimmen. Die Transformationsdeterminante ist damit

$$J = \frac{1}{6} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \eta_i^a \eta_k^b \eta_l^c \quad (2.77)$$

Weiterhin muss an dieser Stelle betont werden, dass entgegen dem Newtonschen Fall bei der hier verwendeten Wahl der Metrik (2.75) die Determinante zum Anfangszeitpunkt ungleich Eins ist, $\dot{J} \neq 1$.²³

Die (inverse) orthonormale Basis wird durch das Dreibein (Triade, Frame) $\mathbf{e}_a = e_a^i \partial / \partial X^i$ beschrieben, das wiederum wie folgt durch die Coframes

²² Eine andere Wahl wäre eine ganz allgemeine orthogonale, aber nicht mehr orthonormale Anfangsmetrik G_{ab} anstelle von δ_{ab} . Diese kann die Anfangsdaten beinhalten und würde sehr einfache Anfangs-Coframes erlauben, nämlich ${}^G\eta_i^a(t_0) = \delta_i^a$. Dieser Fall wäre näher am Newtonschen Analogon, die entstehenden Gleichungen werden dann aber schnell unübersichtlich wegen der häufig auftretenden räumlichen Ableitungen von G_{ab} . CHANDRASEKHAR (1983) diskutiert Situationen, in denen diese Wahl sinnvoll sein kann. In Anhang A betrachte ich den Fall $G_{ab} \neq \delta_{ab}$ genauer. Dort werden einerseits Ausdrücke für den Expansionstensor in der jeweiligen Schreibweise angegeben und andererseits – ausgehend von den Cartanschen Strukturgleichungen – detailliert die Auswirkungen der Wahl auf die Form der kovarianten Ableitung analysiert.

²³ Allgemein, für G_{ab} anstelle von δ_{ab} , gilt $J = \sqrt{\det g_{ij} / \det G_{ij}} = \sqrt{g/G}$ und damit $\dot{J} = 1$.

ausgedrückt werden kann,

$$e_a^i \eta_j^a = \delta_j^i \quad \Longrightarrow \quad e_a^i = \frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \eta_k^b \eta_l^c \quad (2.78)$$

Die inverse Metrik g^{ij} nimmt, ausgedrückt durch Cartans Coframes, folgende Form an,

$$g^{ij} = \delta^{ab} e_a^i e_b^j = \frac{1}{2J^2} \delta_{ac} \delta_{bd} \epsilon^{ikl} \epsilon^{jmn} \eta_k^a \eta_l^b \eta_m^c \eta_n^d \quad (2.79)$$

Selbst wenn an dieser Stelle die Abhängigkeit der Transformationsdeterminante J von den Coframes ignoriert wird, ist der Ausdruck für die inverse Metrik vierter Ordnung in den Coframes. Ausblickend auf das Ziel, in der relativistischen Zel'dovich-Approximation die Feldgrößen exakt durch das (linearisierte) Coframe anzugeben, deutet bereits dieser Term auf die Schwierigkeit des Unterfangens hin.

Die beiden ersten wichtigen Beziehungen für die Coframes können angegeben werden, indem das Verschwinden der kovarianten Ableitung der Metrik $g_{ij||k} = 0$ betrachtet wird. Insbesondere gilt dann $g^{kl} g_{kl||i} = 0$ und es ist

$$e_a^k \eta_{k||i}^a = 0 \quad \text{und} \quad e_a^k \eta_{i||k}^a = 2e_a^k \eta_{[i|k]}^a \quad (2.80)$$

Für letztere Relation wurde $\eta_{[i|j]}^a = \eta_{[i|j]}^a$ verwendet, was direkt aus der Symmetrie der Zusammenhangskoeffizienten (Christoffelsymbole) folgt.

Bei der verwendeten Wahl der Koordinaten gilt $J = \sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{g}$. An dieser Stelle muss in Betracht gezogen werden, dass die Determinante J kein Skalar ist, sondern eine skalare Dichte, d.h. ihre kovariante und partielle Ableitung stimmen nicht überein. Während die kovariante Ableitung gemäß (2.80) verschwindet,²⁴

$$\frac{J_{||i}}{J} = \frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{mkl} \eta_{m||i}^a \eta_k^b \eta_l^c = e_a^k \eta_{k||i}^a = 0 \quad (2.81)$$

ist die partielle Ableitung nach den räumlichen Komponenten verschieden von Null,

$$\frac{J_{|i}}{J} = e_a^k \eta_{k|i}^a = \Gamma_{ki}^k \neq 0 \quad (2.82)$$

Wird die total antisymmetrische Levi-Civita-Tensordichte mit J multipliziert, so entsteht der Tensor, der das dreidimensionale invariante Volumen-

²⁴ Ein weiteres Argument dafür ist, dass $J = \sqrt{\det g_{ij}}$ eine Funktion rein der Metrik ist und deren kovariante Ableitung verschwindet.

element beschreibt,

$$\varepsilon_{ikl} = J\epsilon_{ikl} \quad \text{und} \quad \varepsilon^{ikl} = \frac{1}{J}\epsilon^{ikl} \quad (2.83)$$

Dadurch, dass mit den Coframes eine orthonormale Nichtkoordinaten-Basis verwendet wird, gilt für die entsprechenden Größen mit lateinischen Buchstaben einfach $\varepsilon_{abc} = \epsilon_{abc}$.

Nachdem nun die grundlegenden Begriffe geklärt sind, sollen die ADM-Gleichungen (2.64)-(2.68) in einer Form geschrieben werden, in der sie ausschließlich die Coframes als dynamische Variablen beinhalten. Die äußere Krümmung ist

$$\mathcal{K}_{ij} = -\frac{1}{2}\delta_{ab}(\dot{\eta}^a_i \eta^b_j + \eta^a_i \dot{\eta}^b_j) \quad (2.84)$$

und der Expansionstensor, der in der Form Θ^i_j dem Newtonschen Fall am nächsten kommt, wird zu

$$\Theta_{ij} = \delta_{ab}\dot{\eta}^a_i \eta^b_j, \quad \text{bzw.} \quad \Theta^i_j = e^i_a \dot{\eta}^a_j = \frac{1}{2J}\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\dot{\eta}^a_j \eta^b_k \eta^c_l \quad (2.85)$$

So ist die Symmetriebedingung (2.66), ausgedrückt durch Coframes,

$$\Theta_{[ij]} = \delta_{ab}\dot{\eta}^a_{[i} \eta^a_{j]} = 0 \quad (2.86)$$

In diesem Bild sind die Bedingungsgleichungen (2.66) zu drei Entwicklungsgleichungen für das Coframe-Feld geworden. Während die ADM-Gleichungen lediglich sechs Entwicklungsgleichungen für die sechs Komponenten des (dort symmetrischen) Expansionstensors beinhalteten, stehen nun die vollen neun Entwicklungsgleichungen zur Verfügung, die zum Bestimmen der neun Komponenten des Coframe-Feldes benötigt werden.

Da die Spur des Expansionstensors nach (2.85) als $\Theta = \dot{J}/J$ geschrieben werden kann, ist die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} = -\Theta\rho$ exakt zu lösen, so dass – wie behauptet – die Coframes als alleinige dynamische Variablen übrig sind. Durch Integration wird die Massendichte zu

$$(\rho J)^\cdot = 0 \quad \implies \quad \rho = \dot{\rho} \frac{J}{\dot{J}} \quad (2.87)$$

Um auch die restlichen Gleichungen des Systems (2.64) bis (2.68) umschreiben zu können, muss der Riemannsche Krümmungstensor in drei Dimensionen durch Coframes ausgedrückt werden. Dazu sei er wie üblich durch die Kommutationsrelation der zweiten kovarianten Ableitung eines Tensors

definiert, in diesem Fall der Coframes selber, d.h. $R_{kli}^m \eta_m^a \equiv \eta_{i||k||l}^a - \eta_{i||l||k}^a$.
Damit wird der Riemanntensor zu

$$R_{klij} = \delta_{ab} (\eta_{i||k||l}^a - \eta_{i||l||k}^a) \eta_j^b \quad (2.88)$$

und schließlich zu

$$R_{ijkl}^i = \delta_{ab} (\eta_{i||j||k}^a - \eta_{i||k||j}^a) \eta_l^b \quad (2.89)$$

Der Riccitensor entsteht durch Kontraktion, $R_{ij} = R_{ikj}^k$, und liest sich als

$$R_{ij} = \delta_{ab} (\eta_{k||i}^a - \eta_{k||i}^a) \eta_j^b \quad (2.90)$$

Außerdem kann als alternative Formulierung das etwas elegantere

$$R_{ij} = \frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{klm} (\eta_{j||k||i}^a - \eta_{j||i||k}^a) \eta_l^b \eta_m^c \quad (2.91)$$

angegeben werden. In diesem Term werden die störenden gehobenen kovarianten Ableitungen vermieden. Durch (2.78) sowie die Identitäten

$$\begin{aligned} i) \quad & \epsilon^{ikl} \epsilon_{jkl} = 2\delta_j^i \\ ii) \quad & \epsilon^{ikl} \epsilon_{imn} = \delta_m^k \delta_n^l - \delta_n^k \delta_m^l \\ iii) \quad & \epsilon^{ikl} \epsilon_{jmn} = \delta_j^i \delta_m^k \delta_n^l + \delta_m^i \delta_n^k \delta_j^l + \delta_n^i \delta_j^k \delta_m^l \\ & - \delta_j^i \delta_n^k \delta_m^l - \delta_m^i \delta_j^k \delta_n^l - \delta_n^i \delta_m^k \delta_j^l \end{aligned}$$

geht (2.91) in (2.90) über. Der Riccitensor mit gemischten Indizes im (3+1)-Split ist dann

$$R_{ij}^i = \delta_{ab} (\eta_{k||i}^a - \eta_{k||i}^a) \eta_j^b = \delta^{ab} e_a^i (e_b^k{}_{||k||j} - e_b^k{}_{||j||k}) \quad (2.92)$$

In der zweiten Form wird der Riccitensor allein durch Dreibeine ausgedrückt, was im Fall der relativistischen Zel'dovich-Approximation die Berechnung erleichtern wird. Durch weitere Kontraktion wird für den Krümmungsskalar $R = R_k^k$ folgende Form gefunden,

$$R = \delta_{ab} (\eta_{k||k}^a - \eta_{k||k}^a) \eta_l^b = \delta^{ab} e_a^l (e_b^k{}_{||k||l} - e_b^k{}_{||l||k}) \quad (2.93)$$

Damit werden die ADM-Entwicklungsgleichungen (2.65) zu

$$\frac{1}{2} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \ddot{\eta}_j^a \eta_k^b \eta_l^c + \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \dot{\eta}_j^a \dot{\eta}_k^b \eta_l^c = \left(4\pi G \dot{\rho} + \Lambda J \right) \delta_j^i - J R_j^i \quad (2.94)$$

und die ursprünglichen Bedingungsgleichungen zu

$$\delta_{ab}\ddot{\eta}^a_{[i}\eta^b_{j]} = 0 \quad (2.95)$$

$$\epsilon_{abc}\epsilon^{mkl}\dot{\eta}^a_m\dot{\eta}^b_k\eta^c_l = 16\pi G\dot{J}\dot{\rho} + 2\Lambda J - JR \quad (2.96)$$

$$(\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\dot{\eta}^a_j\eta^b_k\eta^c_l)_{||i} = (\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\dot{\eta}^a_i\eta^b_k\eta^c_l)_{||j} \quad (2.97)$$

Die erste dieser Gleichungen, (2.95), entsteht durch die zeitliche Ableitung der Symmetriebedingung für den Expansionstensor,²⁵ während (2.96) aus der Hamiltonbedingung folgt. Die dritten Gleichungen, (2.97), sind die Impulsbedingungen, hier zur besseren Lesbarkeit noch mit der kovarianten Ableitung ausgedrückt. Aus dem gleichen Grund tritt bei den Entwicklungsgleichungen (2.94) der Riccitenor noch auf der rechten Seite auf. Wie vorher gezeigt, ist es prinzipiell möglich, auch diese Gleichungen ausschließlich in Coframe-Form zu schreiben, wie z.B. in (2.91).²⁶ In (2.100) ist das exemplarisch ausgeführt. Da nun alle Gleichungen als Entwicklungsgleichungen für das Coframe-Feld anzusehen sind, liegt an dieser Stelle ein überbestimmtes Gleichungssystem mit 13 Entwicklungsgleichungen für die neun Komponenten des Coframe-Felds vor.

Indem die Gleichungen (2.94) in ihren Spurteil sowie einen spurfreien Teil getrennt werden, kann obiges System in eine etwas kompaktere Form gebracht werden. Der Spurteil nimmt mit der Hamiltonbedingung die Form

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\ddot{\eta}^a_i\eta^b_k\eta^c_l = \Lambda J - 4\pi G\dot{J}\dot{\rho} \quad (2.98)$$

an, was die bekannte Raychaudhuri-Gleichung ist. Der spurfreie Teil auf der anderen Seite wird zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\ddot{\eta}^a_j\eta^b_k\eta^c_l - \frac{1}{3}\epsilon_{abc}\epsilon^{mkl}\ddot{\eta}^a_m\eta^b_k\eta^c_l\delta^i_j\right) \\ & + \left(\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\dot{\eta}^a_j\dot{\eta}^b_k\eta^c_l - \frac{1}{3}\epsilon_{abc}\epsilon^{mkl}\dot{\eta}^a_m\dot{\eta}^b_k\eta^c_l\delta^i_j\right) = -J\tau^i_j \end{aligned} \quad (2.99)$$

wo τ^i_j der spurfreie Teil des Riccitenors ist und sich aus (2.92) und (2.93) bestimmen lässt. Eine alternative, im Hinblick auf die relativistische Zel'dovich-

²⁵ Der Grund dafür, hier die zeitliche Ableitung zu bilden, liegt in der dann formalen Analogie zu (2.21) aus dem Newtonschen Fall begründet.

²⁶ Ziel an dieser Stelle war es ja, sicher zu stellen, dass sich wirklich alle Gleichungen prinzipiell durch die Coframes ausdrücken lassen. Auch auf die kovariante Ableitung trifft dies natürlich zu, da sowohl die kovariante als auch die kontravariante Metrik durch Coframes ausgedrückt wurden.

Approximation interessante Formulierung von (2.94) ist

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}^a_i + \frac{1}{2J} \epsilon_{bcd} \epsilon^{mkl} \left(\dot{\eta}^a_i \dot{\eta}^b_m \eta^c_k \eta^d_l - \dot{\eta}^a_m \dot{\eta}^b_i \eta^c_k \eta^d_l \right) - \left(4\pi G \frac{\dot{J}\dot{\rho}}{J} + \Lambda \right) \eta^a_i \\ = \frac{1}{J} \delta^{ab} \epsilon_{bcd} \epsilon^{mkl} \left(\eta^c_{k||i||m} \eta^d_l - \eta^c_{k||m||i} \eta^d_l \right) \end{aligned} \quad (2.100)$$

Im Gegensatz zu den vorher angegebenen Gleichungen ist hier der Riccitenor in Coframes ausgedrückt. So entsteht eine Gleichung, die ausschließlich die Coframes sowie deren zeitliche und (kovariante) räumliche Ableitung enthält.

Zusammenfassung: Das Lagrange-Einstein-System (LES)

Als Lagrange-Einstein-System seien die 13 Entwicklungsgleichungen für die neun Komponenten des Coframe-Felds bezeichnet, welche aus den ADM-Gleichungen für das Materiemodell „nichtrotierender Staub“ durch den Übergang von der Koordinatenbasis zur Nichtkoordinatenbasis hergeleitet werden können,

$$i) \quad \delta_{ab} \ddot{\eta}^a_{[i} \eta^b_{j]} = 0 \quad (2.101)$$

$$ii) \quad \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \ddot{\eta}^a_i \eta^b_k \eta^c_l = \Lambda J - 4\pi G \dot{J}\dot{\rho} \quad (2.102)$$

$$iii) \quad \left(\epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \dot{\eta}^a_j \eta^b_k \eta^c_l \right)_{||i} = \left(\epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \dot{\eta}^a_i \eta^b_k \eta^c_l \right)_{||j} \quad (2.103)$$

$$iv) \quad \epsilon_{abc} \epsilon^{mkl} \dot{\eta}^a_m \dot{\eta}^b_k \eta^c_l = 16\pi G \dot{J}\dot{\rho} + 2\Lambda J - JR \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} v) \quad \frac{1}{2} \left(\epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \ddot{\eta}^a_j \eta^b_k \eta^c_l - \frac{1}{3} \epsilon_{abc} \epsilon^{mkl} \ddot{\eta}^a_m \eta^b_k \eta^c_l \delta^i_j \right) \\ + \left(\epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \dot{\eta}^a_j \dot{\eta}^b_k \eta^c_l - \frac{1}{3} \epsilon_{abc} \epsilon^{mkl} \dot{\eta}^a_m \dot{\eta}^b_k \eta^c_l \delta^i_j \right) = -J\tau^i_j \end{aligned} \quad (2.105)$$

Dieses Lagrange-Einstein-System ist ein System an Gleichungen, das als einzige dynamische Variable das Coframe-Feld enthält. Auch der Riccitenor und -skalar sowie die kovariante Ableitung können prinzipiell mit Hilfe der in diesem Abschnitt abgeleiteten Gleichungen durch das Coframe-Feld beschrieben werden. Im Fall von Riccitenor und -skalar sind das die Gleichungen (2.92) und (2.93), für die kovariante Ableitung erlauben (2.76) und (2.79) die Berechnung der Zusammenhangskoeffizienten.

2.3.2 Die Formulierung mit dem Weyltensor

Wie schon im Newtonschen Fall für das Lagrange-Newton-System (2.21), (2.22) ist es möglich, für das Lagrange-Einstein-System (2.101)-(2.105) eine Formulierung mit Hilfe des „Gezeitentensors“ anzugeben. Um diesen auf den relativistischen Fall zu verallgemeinern, wird hier der Weyltensor eingeführt, der als spurfreier Teil des Riemannschen Krümmungstensors definiert ist. Weiterhin lässt sich der Weyltensor in zwei Teile aufspalten, die als elektrischer und magnetischer Teil bezeichnet werden. Dabei spielt der elektrische Teil des Weyltensors die Rolle des verallgemeinerten Gezeitentensors, während der magnetische Teil kein Gegenstück in der Newtonschen Theorie hat und gravitomagnetische Effekte wie Gravitationswellen beschreibt. Außerdem ist es möglich, für die Teile des Weyltensors ein System von Gleichungen anzugeben, das eine starke Analogie zu den aus der Elektrodynamik bekannten Maxwell-Gleichungen aufweist und daher als Maxwell-artig bezeichnet wird.

Der Weyltensor als spurfreier Teil des Krümmungstensors ist nur in vier oder mehr Dimensionen von Null verschieden.²⁷ Er ist

$$C^{\mu\nu}_{\kappa\lambda} = {}^{(4)}R^{\mu\nu}_{\kappa\lambda} - 2\delta^{[\mu}_{[\kappa} {}^{(4)}R^{\nu]}_{\lambda]} + \frac{1}{3}\delta^{[\mu}_{[\kappa} \delta^{\nu]}_{\lambda]} {}^{(4)}R \quad (2.106)$$

und besitzt wie der Riemannstensor zehn unabhängige Komponenten, so dass er wie dieser die gesamte Information des Systems trägt. Der Weyltensor erfüllt durch seine Definition neben der Spurfreiheit über beliebige zwei Indizes außerdem alle Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors. Er kann gemäß

$$E_{\mu\nu} = C_{\mu\kappa\nu\lambda} u^\kappa u^\lambda \quad \text{and} \quad H_{\mu\nu} = *C_{\mu\kappa\nu\lambda} u^\kappa u^\lambda \quad (2.107)$$

irreduzibel in einen elektrischen ($E_{\mu\nu}$) und einen magnetischen ($H_{\mu\nu}$) Teil aufgespalten werden, die beide spurfreie symmetrische Tensoren sind und damit jeweils fünf unabhängige Komponenten besitzen. Hier wird durch den Hodgeschen Sternoperator $*$ das Duale des Weyltensors bezeichnet, siehe dazu allgemein (A.17) im Anhang über Differentialformen. Die Definition des magnetischen Teils ist allerdings nicht eindeutig, da auch andere Formen des magnetischen Teils zusammen mit dem angegebenen elektrischen Teil den Weyltensor eindeutig reproduzieren.²⁸

²⁷ Da er vier Indizes besitzt, sind in drei oder weniger Dimensionen notwendigerweise mindestens zwei gleich, so dass der Tensor wegen seiner Spurfreiheit identisch verschwindet.

²⁸ Eine von der hier gegebenen abweichende Definition für den magnetischen Teil benutzen z.B. BERTSCHINGER und HAMILTON (1994). Die in diesem Abschnitt entwickelten Gleichungen sind jedoch in beiden Fällen dieselben. Dennoch besteht die Möglichkeit,

Im (3+1)-Split auf Fluss-orthogonale Hyperflächen gilt für den elektrischen ebenso wie für den magnetischen Teil $E_{0\mu} = H_{0\mu} = 0$. Die projizierten räumlichen Teile des Weyltensors nehmen folgende Form an,²⁹

$$E^i_j = -\dot{\Theta}^i_j - \Theta^i_k \Theta^k_j - \frac{1}{3} \left(4\pi G \rho - \Lambda \right) \delta^i_j \quad (2.108)$$

$$H^i_j = -\varepsilon^{ikl} \Theta_{jk||l} \quad (2.109)$$

wobei nach dem letzten Abschnitt die Dichte durch das exakte Integral $\rho = \frac{\dot{\rho} J}{J}$ gegeben ist.³⁰ Im letzten Schritt wurden bereits die Einsteingleichungen benutzt, so dass die beiden Tensoren nicht mehr spurfrei symmetrisch sind, sondern die ADM-Gleichungen gerade dadurch reproduzieren, dass Spurfreiheit und Symmetrie gefordert werden. Mit Hilfe der Coframes ausgedrückt nehmen E^i_j und H^i_j schließlich folgende Form an,

$$E^i_j = -\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ikl} \ddot{\eta}^a_j \eta^b_k \eta^c_l - \frac{1}{3} \left(4\pi G \frac{\dot{\rho} J}{J} - \Lambda \right) \delta^i_j \quad (2.110)$$

$$H^i_j = -\left(\delta_{ab} \varepsilon^{ikl} \dot{\eta}^a_j \eta^b_k \right)_{||l} \quad (2.111)$$

Der elektrische Teil des Weyltensors führt auf eine direkte Verallgemeinerung der Newtonschen Gleichungen (2.32) durch

$$E_{[ij]} = 0 \iff (2.95) \quad (2.112)$$

$$E^k_k = 0 \iff (2.96) \quad (2.113)$$

wohingegen der magnetische Teil die Impulsbedingungen reproduziert,

$$H_{[ij]} = 0 \iff (2.97) \quad (2.114)$$

$$H^k_k = 0 \iff (2.95) \quad (2.115)$$

Die Forderung der Spurfreiheit (2.115) resultiert hier wieder in der Symmetriebedingung für die zeitliche Ableitung des Expansionstensors, ist also zu (2.112) äquivalent. An dieser Stelle lässt sich durch die Bedingungen an den elektrischen Teil des Weyltensors der „elektrische“ Teil des LES, d.h. der Teil

dass eine andere Form des magnetischen Teils zu auf den ersten Blick einfacheren Gleichungen führen könnte. Der elektrische Teil dagegen wird dadurch eindeutig festgelegt, dass er die Verallgemeinerung des Newtonschen Gezeitentensors sein soll.

²⁹ Obwohl die betrachteten Teile stets projizierte vierdimensionale Größen sind, wird in der vorliegenden Arbeit auf das vorgestellte ⁽⁴⁾ verzichtet, da der Weyltensor in drei Dimensionen identisch verschwindet und damit keine Gefahr der Verwechslung besteht.

³⁰ In diesem Abschnitt wird der invariante Tensor ε^{ikl} anstelle von ϵ^{ikl} benutzt, siehe (2.83).

mit dem Newtonschen Grenzfall LNS, vollständig reproduzieren, während der magnetische Teil lediglich auf einen Teil der Gleichungen des restlichen „magnetischen“ Teils des LES führt. Insgesamt können auf diese Weise sieben Gleichungen reproduziert werden. Für zukünftige Forschung wäre es vor allem interessant zu testen, ob alternative Formulierungen des magnetischen Teils des Weyltensors hier zu anderen Ergebnissen führen. Insbesondere die Bedingung an den Spurteil des magnetischen Teils (2.115) sollte zu (mindestens) einer weiteren Gleichung führen.

Um die Bedeutung der Teile des Weyltensors zu verdeutlichen, sollen sie nun mit in der Kosmologie geläufigen Größen in Verbindung gesetzt werden. Zunächst kann der elektrische Teil durch den in der Kosmologie häufig verwendeten spurfreien symmetrischen Teil des Geschwindigkeitsgradienten ausgedrückt werden, den Scherungstensor ${}^{(4)}\sigma_{\mu\nu} = u_{(\mu;\nu)} - \frac{1}{3}u^\kappa{}_{;\kappa}{}^{(4)}g_{\mu\nu}$. Seine dreidimensionale Projektion ist $\sigma^i_j = \Theta^i_j - \frac{1}{3}\Theta\delta^i_j$, wobei der Spurteil Θ die Expansionsrate darstellt. Damit ist

$$E^i_j = -\dot{\sigma}^i_j - \left(\Theta^i_k \Theta^k_j - \frac{1}{3}\Theta^l_k \Theta^k_l \delta^i_j \right) \quad (2.116)$$

$$= -\dot{\sigma}^i_j - \frac{2}{3}\Theta\sigma^i_j - \left(\sigma^i_k \sigma^k_j - \frac{1}{3}\sigma^l_k \sigma^k_l \delta^i_j \right) \quad (2.117)$$

Eine ähnliche Beziehung kann für den magnetischen Teil bei Betrachtung seiner kovarianten Rotation gegeben werden. Diese nimmt folgende Form an,

$$g_{im}\varepsilon^{mkl}H_{jk||l} = \Theta_{ij||k}^{\parallel k} - \Theta_{j||i||k}^k \quad (2.118)$$

Zusammen mit (2.71) erlaubt das, den magnetischen Teil des Weyltensors mit dem dreidimensionalen Riccitenor in Verbindung zu setzen,

$$2g_{m(i}\varepsilon^{mkl}H_{j)k||l} = -\dot{R}_{ij} + \Theta_{ij||k}^{\parallel k} - \Theta_{||i||j}^k \quad (2.119)$$

Während der Expansionstensor, der in den Ausdrücken für E^i_j und H^i_j vorkommt, die äußere Krümmung beschreibt, beinhaltet der magnetische Teil des Weyltensors zusätzlich einen von der inneren Krümmung des dreidimensionalen Raums abhängigen Term. In beiden Fällen beschreiben die Teile des Weyltensors die zeitliche Entwicklung der gängigen Größen, namentlich $\dot{\sigma}^i_j$ und \dot{R}^i_j . Beide Beziehungen enthalten außerdem Zusatzterme, die vom Expansionstensor abhängen. Im Abschnitt über die relativistische Lagrangesche Störungsrechnung wird zu sehen sein, dass im Störungsschema erster Ordnung diese zusätzlichen Terme wegfallen, so dass dort die Relationen sehr einfach werden.

Um schließlich auch die noch fehlenden Gleichungen (2.72) des ADM-Systems durch den Weyltensor ausdrücken zu können, wird im folgenden Abschnitt ein vollständiges System an Entwicklungsgleichungen für seine beiden Teile hergeleitet.

Die Maxwell-artigen Gleichungen für den Weyltensor

Die projizierten Teile des Weyltensors, sein elektrischer und magnetischer Teil (2.107), genügen einem System von Entwicklungsgleichungen, das formal den Maxwellgleichungen sehr ähnlich ist, siehe z.B. BERTSCHINGER und HAMILTON (1994). Der Weyltensor spielt hier die Rolle des elektromagnetischen Feldtensors. Es wird ausgegangen von den vierdimensionalen Bianchi-Identitäten für den Fall rotationsfreien Staubs, $u^\mu = (1, \vec{0})$ und $u^\mu_{;\nu} = \Theta^\mu_\nu$,

$$C^\mu_{\nu\kappa\lambda;\mu} = 8\pi G \left[(\rho u_\nu u_{[\lambda})_{;\kappa]} + \frac{1}{3} \rho_{;[\kappa} g_{\lambda]\nu} \right] \quad (2.120)$$

Nun wird der Weyltensor durch seine Teile (2.107) ersetzt, die den gesamten Tensor durch

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\kappa\lambda} = & (g_{\mu\nu\alpha\beta} g_{\kappa\lambda\gamma\delta} - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\kappa\lambda\gamma\delta}) u^\alpha u^\gamma E^{\beta\delta} \\ & + (\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} g_{\kappa\lambda\gamma\delta} + g_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\kappa\lambda\gamma\delta}) u^\alpha u^\gamma H^{\beta\delta}, \end{aligned} \quad (2.121)$$

identisch reproduzieren. Hier gilt $g_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}$ und der Tensor des invarianten Volumenelements wird analog zu (2.83) als $\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} = \sqrt{-^{(4)}g} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}$ definiert. Durch Transformation in mitbewegte (Lagrangesche) Koordinaten entstehen – mit $\sqrt{-^{(4)}g} = \sqrt{g} = J$ und $\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} u^\mu = \varepsilon_{\nu\kappa\lambda}$ für das räumliche invariante Volumenelement – Gleichungen für die zeitliche Entwicklung der beiden Teile des Weyltensors,³¹

$$\begin{aligned} \dot{E}^i_j + 3\Theta^i_k E^k_j - \Theta^k_l E^l_k \delta^i_j - \varepsilon^{ikl} H_{jk||l} &= -4\pi G \frac{\dot{J}}{J} \dot{\rho} \left(\Theta^i_j - \frac{1}{3} \Theta \delta^i_j \right) \\ \dot{H}^i_j + 3\Theta^i_k H^k_j - \Theta^k_l H^l_k \delta^i_j + \varepsilon^{ikl} E_{jk||l} &= -\frac{4\pi G}{3} \frac{\dot{J}}{J} \dot{\rho}_{|k} \varepsilon^{ikl} g_{jl} \end{aligned} \quad (2.122)$$

³¹ Vergleiche die Ausdrücke bei MAARTENS und BASSETT (1998); für den Zusammenhang mit den Bianchi-Identitäten siehe LESAME, ELLIS und DUNSBY (1996).

Deren kovariante Divergenz bezüglich den Lagrangeschen Koordinaten liest sich als

$$\begin{aligned} E^k_{i||k} - g_{ik}\varepsilon^{kmn}\Theta_{ml}H^l_n &= \frac{8\pi G}{3}\frac{\overset{\circ}{J}}{J}\dot{\rho}_{|i} \\ H^k_{i||k} + g_{ik}\varepsilon^{kmn}\Theta_{ml}E^l_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.123)$$

Diese Divergenzgleichungen sind äquivalent zu den antisymmetrischen Teilen der Entwicklungsgleichungen (2.122), so dass für das Maxwell-artige System lediglich deren symmetrische Teile in Betracht gezogen werden müssen, d.h.

$$\begin{aligned} \dot{E}_{ij} + \Theta_{(ik}E^k_{j)} - \Theta^k_l E^l_k g_{ij} - g_{m(i}\varepsilon^{mkl}H_{j)k||l} &= -4\pi G\frac{\overset{\circ}{J}}{J}\dot{\rho}\left(\Theta_{ij} - \frac{1}{3}\Theta g_{ij}\right) \\ \dot{H}_{ij} + \Theta_{(ik}H^k_{j)} - \Theta^k_l H^l_k g_{ij} + g_{m(i}\varepsilon^{mkl}E_{j)k||l} &= 0 \end{aligned} \quad (2.124)$$

Dieses System von Gleichungen ist natürlich identisch erfüllt, wenn die im vorigen Abschnitt gefundenen Ausdrücke für die Teile des Weyltensors eingesetzt und die ADM-Gleichungen angewendet werden. Gleichung (2.124) ist die zu (2.72) äquivalente Gleichung, die zum Abschließen des Systems im letzten Abschnitt gesucht wurde.

Die Hierarchie der Gleichungen

Mit den Ausdrücken des vorangegangenen Abschnittes lässt sich nun ein abgeschlossenes hierarchisches System an Gleichungen aufstellen, beginnend mit der Dichte,³²

$$\dot{\rho} = -\Theta\rho \quad (2.125)$$

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \sigma^k_l \sigma^l_k - 4\pi G\rho + \Lambda \quad (2.126)$$

$$\dot{\sigma}^i_j = -\frac{2}{3}\Theta\sigma^i_j - \left(\sigma^i_k \sigma^k_j - \frac{1}{3}\sigma^l_k \sigma^k_l \delta^i_j\right) - E^i_j \quad (2.127)$$

$$\dot{E}^i_j = -\Theta E^i_j - 3\left(\sigma^i_k E^k_j - \frac{1}{3}\sigma^k_l E^l_k \delta^i_j\right) - 4\pi G\rho\sigma^i_j + \varepsilon^{ikl}H_{jk||l} \quad (2.128)$$

$$\dot{H}^i_j = -\Theta H^i_j - 3\left(\sigma^i_k H^k_j - \frac{1}{3}\sigma^k_l H^l_k \delta^i_j\right) - \varepsilon^{ikl}E_{jk||l} \quad (2.129)$$

In diesem System an Gleichungen wird die zeitlichen Ableitungen der Größen ρ , Θ , σ^i_j , E^i_j , sowie H^i_j in ihrer wechselseitigen Abhängigkeit schön dargestellt. Alternativ zur Gleichung (2.129) kann auch Gleichung (2.123) in der

³² Ein ähnliches System, allerdings unter der Einschränkung $\text{div}H = 0$ findet sich in LESAME, ELLIS und DUNSBY (1996), zum analogen System im Newtonschen Grenzfall siehe EHLERS (1961), TRÜMPER (1965) und ELLIS (1971).

Form

$$\varepsilon^{ikl} H_{jk||l} = -(\sigma_{j||k}^k{}^i - \sigma_{j||k}^i{}^k) + \frac{1}{3}(\Theta_{||j}^i - \Theta_{||k}^k{}^i \delta_j^i). \quad (2.130)$$

zum Abschluss des Systems benutzt werden. Das unterstreicht noch einmal die Sonderstellung des magnetischen Teils des Weyltensors als krümmungsabhängiger Größe.

2.3.3 Der Newtonsche Grenzfall

In diesem Abschnitt wird aufgezeigt, wie der Newtonsche Grenzfall als geometrischer Limes exakter, d.h. integrierbarer Formen definiert werden kann. Es entsteht dann wie erwartet das Lagrange-Newton-System als Newtonscher Grenzfall des Lagrange-Einstein-Systems.

Der Übergang allgemeiner nichtintegrierbarer Coframes η_i^a zu solchen der speziellen Newtonschen (integrierbaren) Form geschieht durch

$$\eta_i^a \longrightarrow {}^N\eta_i^a = f_{|i}^a \quad (2.131)$$

Er transformiert das LES-Subsystem (2.95), (2.96) direkt auf die Gleichungen des LNS (2.21) und (2.22). Besonders einfach ist das bei Benutzung von Differentialformen zu sehen. Es gilt außerdem wie erwartet, dass der elektrische Teil des Weyltensors zum (negativen) Gezeitentensor des Newtonschen Bildes wird, d.h. $E_j^i \rightarrow -\mathcal{E}_j^i$. Das räumliche Linienelement nimmt nach dem Übergang zu exakten Formen die wohlbekannte Newtonsche Form

$${}^{(3)}\mathbf{g} = {}^N g_{ij} dX^i \otimes dX^j = \delta_{ab} f_{|i}^a f_{|j}^b dX^i dX^j \quad (2.132)$$

eines in mitbewegte Lagrangesche Koordinaten transformierten Eulerschen Linienelements an. Die zu den Coframes orthonormalen Basisvektoren (Frames) im Newtonschen Grenzfall sollen mit $h_a^i \equiv {}^N e_a^i$ bezeichnet werden. Sie erfüllen die Orthonormierungsbedingung $f_{|j}^a h_a^i = \delta_j^i$ und nehmen folgende Form an,

$$h_a^i = \frac{1}{2^N J} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} f_{|k}^b f_{|l}^c \quad (2.133)$$

In diesem Grenzfall vereinfachen sich die symmetrischen Zusammenhangskoeffizienten zu Termen, die Trägheitskräfte beschreiben, nämlich

$${}^N \Gamma_{kl}^i = h_a^i f_{|kl}^a = \frac{1}{2^N J} \epsilon_{abc} \epsilon^{imn} f_{|kl}^a f_{|m}^b f_{|n}^c \neq 0 \quad (2.134)$$

Obwohl die Zusammenhangskoeffizienten im Newtonschen Fall nicht ver-

schwinden, da im Lagrangebild der Newtonschen Theorie krummlinige Koordinaten gewählt sind, kann leicht gezeigt werden, dass der Riccitenso wie gefordert verschwindet, d.h. ${}^N R_{ij} = 0$. Dazu werden die Relationen $f^a_{|kl} h_a^i = -f^a_{|k} h_a^i{}_{|l} = -f^a_{|l} h_a^i{}_{|k}$ benutzt, woraus

$${}^N R_{ij} = {}^N \Gamma^k_{ij|k} - {}^N \Gamma^k_{ki|j} + {}^N \Gamma^k_{kl} {}^N \Gamma^l_{ij} - {}^N \Gamma^k_{il} {}^N \Gamma^l_{jk} = 0 \quad (2.135)$$

resultiert. Aus (2.134) folgt außerdem sofort, dass die bezüglich der krummlinigen Koordinaten kovariante Ableitung der Deformationsform im Newtonschen Fall verschwindet,

$${}^N \eta^a_{i||j} = {}^N \eta^a_{i|j} - {}^N \Gamma^k_{ij} {}^N \eta^a_k = 0 \quad (2.136)$$

Da aber, wie im vorigen Abschnitt gezeigt, die kovariante Ableitung und die Ableitung nach der Zeit nicht kommutieren, verschwindet auch ${}^N \dot{\eta}^a_{i||j}$ nicht,

$${}^N \dot{\eta}^a_{i||j} = \dot{f}^a_{|ij} - \dot{f}^a_{|k} h_b^k f^b_{|ij} \quad (2.137)$$

und es kann gezeigt werden, dass der magnetische Teil des Weyltensors im Fall von nichtrotierendem Staub kein Newtonsches Analogon besitzt, sondern im geometrischen Limes stets verschwindet,

$${}^N H^i_j = -\frac{1}{N} \delta_{ab} \epsilon^{imn} f^a_{|j} (\dot{f}^b_{|mn} - \dot{f}^b_{|k} h_c^k f^c_{|mn}) = 0 \quad (2.138)$$

Das Bilden dieses geometrischen Grenzwertes ist streng räumlich, d.h. es beinhaltet nicht den üblichen Übergang $c \rightarrow \infty$. Das liegt daran, dass ein mitbewegter Beobachter im dreidimensionalen Raum die Lichtkegelstruktur nicht wahrnimmt. Ein „Minkowskischer Grenzwert“, ein Grenzwert also, der sowohl den geometrischen Grenzwert als auch den Übergang $c \rightarrow \infty$ beinhaltet, ist für mitbewegt-synchrone Schnitte der Raumzeit wohldefiniert. Er führt in einer Post-Newtonschen Formulierung zur Eulerschen Form der Newtongleichungen, während er in der vorliegenden Formulierung zur entsprechenden Lagrangeschen Form der Gleichungen führt, siehe dazu auch EHLERS (1997) sowie EHLERS und BUCHERT (2009).

2.4 Das Störungsschema erster Ordnung

Nun wird ein Störungsschema erster Ordnung für das Lagrange-Einstein-System aufgestellt.³³ Prinzipiell kann das Schema zu einem allgemeinen Lagrangeschen Störungsschema beliebiger Ordnung in den Coframes ausgebaut werden. Zur Störungsrechnung erster bzw. höherer Ordnung siehe auch MATARRESE, PANTANO und SAEZ (1994)(1) sowie MATARRESE, MOLLERACH und BRUNI (1998), für eine Verallgemeinerung auf Störungslösungen zweiter Ordnung siehe RUSS et al. (1996) sowie RUSS et al. (1997). Matarrese und seine Mitautoren (MATARRESE, PANTANO und SAEZ [1994][2]; MATARRESE und TERRANOVA [1996][2]) schließlich diskutieren die relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Gleichungen in Lagrangescher Form. An dieser Stelle allerdings sollen ausschließlich die linearisierten Gleichungen behandelt werden, da das ausgegebene Ziel ist, mit Hilfe einer allgemeinen Lösung der Gleichungen erster Ordnung eine relativistische Verallgemeinerung der bekannten Zel'dovich-Näherung zu finden.

2.4.1 Das LES in erster Ordnung

Für das Störungsschema erster Ordnung wird hier eine flache homogene und isotrope Hintergrundmetrik mit einer beliebigen Anfangsstörung $P_i^a(X, t_0) = \dot{P}_i^a(X)$ gewählt. Bei dieser Wahl der Koordinaten nehmen Cartans Coframes die Form

$$\eta_i^a = a(t) [\delta_i^a + P_i^a(X, t)] \quad (2.139)$$

an, wobei $a(t)$ der Skalenfaktor ist und $P_i^a(X, t)$ ein zeitlich veränderliches, räumlich inhomogenes Abweichungsfeld (Störung). In dieser Störung $P_i^a(X, t)$ werden die Gleichungen linearisiert.³⁴ Mit $\tilde{\eta}_i^a$ werde das „abweichende“ (pekuliare) Coframe bezeichnet,

$$\tilde{\eta}_i^a \equiv \frac{1}{a} \eta_i^a = \delta_i^a + P_i^a(X, t) \quad (2.140)$$

Wie üblich wird festgelegt, dass zu einem Anfangszeitpunkt t_0 der Skalenfaktor $a(t_0) = 1$ ist. Außerdem darf die anfängliche Störung nicht verschwinden, d.h. $\dot{P}_i^a(X) \neq 0$.³⁵

³³ Hier sei an die Beschränkung auf das Materiemodell „rotationsfreier Staub“ erinnert. Ein Lagrangescher störungstheoretischer Zugang, der auch Wirbelzustände in Betracht zieht, findet sich in ASADA und KASAI (1999).

³⁴ Zur besseren Lesbarkeit soll hier nicht die eigentlich angebrachte Notation $^{(1)}P_i^a(X, t)$ verwendet werden. Eine Gefahr der Verwechslung besteht nicht.

³⁵ Die Anfangsstörung kann nicht einfach gleich Null gesetzt werden, da das die Anfangsmetrik flach machen würde und sämtliche Entwicklung der Metrik auf diese Weise un-

So ist auch der anfängliche 3-Ricci-Tensor von Null verschieden. Es sei daran erinnert, dass im allgemeinen Fall eines homogenen und isotropen Hintergrunds in einem mit $-6k/a^2$ konstant gekrümmten Raum die nullte Ordnung von (2.94) einen Ricci-Tensor ${}^H R^i_j = -2\frac{k}{a^2}\delta^i_j$ liefert, siehe z.B. KASAI (1995), wohingegen die Wahl (2.139) auf ${}^H R^i_j = 0$ führt.³⁶

In den hier abgeleiteten Gleichungen tritt die Störung wie schon die Coframes im Lagrange-Einstein-System nur summiert über die Nichtkoordinaten-Indizes auf, so dass der folgende im Rest des Abschnittes verwendete Tensor definiert werden kann,³⁷

$$P^i_j \equiv \delta_a^i P^a_j \quad \text{und} \quad P \equiv P^k_k = \delta_{ak} P^a_k \quad (2.141)$$

Damit nimmt die räumliche Metrik in erster Ordnung die Form

$${}^{(1)}g_{ij} = a^2 (\delta_{ij} + P_{ij} + P_{ji}) \quad (2.142)$$

an, und die Transformationsdeterminante vom Übergang aus der Koordinaten- zur Nichtkoordinaten-Basis wird zu

$${}^{(1)}J = a^3 (1 + P) \quad \text{und} \quad {}^{(1)}\dot{J} = (1 + \dot{P}) \neq 0 \quad (2.143)$$

An dieser Stelle sei daran erinnert, dass das Ziel dieses Abschnittes strikte Linearisierung ist und daher nicht mit der in 2.5 gegebenen Definition der relativistischen Zel'dovich-Approximation verwechselt werden darf. Diese wird ja genau dadurch charakterisiert sein, dass eine spezielle Lösung der linearisierten Gleichungen in die *exakten* Funktionale für die Feldgrößen wie die Metrik eingesetzt wird.

Die symmetrischen Zusammenhangskoeffizienten in erster Ordnung sind

$${}^{(1)}\Gamma^i_{kl} = P^i_{(k|l)} + P_{(k}^i{}_{|l)} - P_{(kl)}^i \quad (2.144)$$

Speziell gilt ${}^{(1)}\Gamma^k_{kl} = P_{|l}$. Nun sollen die Gleichungen des Lagrange-Einstein-Systems (2.101)-(2.105) im Störungsschema beschrieben werden. Eine einfa-

terdrückt würde, siehe dazu auch MATARRESE und TERRANOVA (1996)(2) sowie RUSS et al. (1996).

³⁶ Da durch passend gewählte Anfangsstörungen ($\dot{R}^i_j \neq 0!$) jeder gewünschte Raum beschrieben werden kann, stellt das keine Einschränkung der Allgemeinheit dar.

³⁷ Zunächst nur als Abkürzung eingeführt, um die Lesbarkeit der Gleichungen zu erleichtern, erfüllen beide Indizes die Kriterien von Tensorindizes – strikt im Schema erster Ordnung –, so dass P^i_j tatsächlich als echter Tensor bezeichnet werden kann.

che Rechnung bis hin zu erster Ordnung liefert für die Symmetriebedingung einen Ausdruck, der sich hinsichtlich der Zeit integrieren lässt,

$$\dot{P}_{[ij]} = 0 \implies P_{[ij]} = \overset{\circ}{P}_{[ij]} \quad (2.145)$$

Die ersten drei Entwicklungsgleichungen des Langrange-Einstein-Systems werden hier zu einer Bedingung an die Anfangsstörung.

Als nächstes können kompakte Ausdrücke für die kovariante Ableitung der Coframes und ihrer zeitlichen Ableitung in erster Ordnung angegeben werden,

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\delta_a^i \eta_{k||l}^a &= a(P_{[k|l]}^i + P_{(kl)}^{|i} - P_{(k}^{|i}{}_{|l)}) \\ {}^{(1)}\delta_a^i \dot{\eta}_{k||l}^a &= a\dot{P}_{k|l}^i + \dot{a}(P_{[k|l]}^i + P_{(kl)}^{|i} - P_{(k}^{|i}{}_{|l)}) \end{aligned}$$

Hiermit nehmen die Impulsbedingungen (2.103) in erster Ordnung eine einfache Form an und können ebenfalls integriert werden,

$$\dot{P}_{[k|i]}^k = 0 \implies P_{[k|i]}^k = \overset{\circ}{P}_{[k|i]}^k \quad (2.146)$$

Auch diese Gleichungen des Langrange-Einstein-Systems werden hier zu Bedingungen an die Anfangsstörung.

Die Annahme, dass die Hamiltonbedingung (2.104) für den homogenen Hintergrund, d.h. für verschwindende Störungen, gültig ist, führt auf

$$3H^2 = 8\pi G \varrho_H + \Lambda \quad (2.147)$$

wo $\varrho_H = \varrho_{H0}/a^3$ die homogene Hintergrunddichte darstellt. Die Hamiltonbedingung im Störungsschema erster Ordnung wird damit zu

$$H\dot{P} + 4\pi G \varrho_H P = -\frac{1}{4} {}^{(1)}R \quad (2.148)$$

Weiter sollen nun Riccitensor und Krümmungsskalar in erster Ordnung bestimmt werden. Da – wie mit (2.144) gezeigt – die symmetrischen Zusammenhangskoeffizienten von erster und höherer Ordnung sind, d.h. ${}^{(0)}\Gamma_{kl}^i = 0$, sind die Produktterme in der Definition des Riccitensors von mindestens zweiter Ordnung und können hier vernachlässigt werden. Aus den beiden übrig bleibenden Termen ${}^{(1)}R_{ij} = {}^{(1)}\Gamma_{ij|k}^k - {}^{(1)}\Gamma_{ki|j}^k$ ergibt sich

$${}^{(1)}R_{ij} = P_{|ij} - P_{ij}^{k}{}_{|k} + \left(\overset{\circ}{P}_{(ik)}^{k}{}_{|j} + \overset{\circ}{P}_{(jk)}^{k}{}_{|i} + \overset{\circ}{P}_{[ij]}^{k}{}_{|k} - 2\overset{\circ}{P}_{|ij} \right) \quad (2.149)$$

Hierzu wurden die beiden Bedingungsgleichungen (2.145) und (2.146) benutzt, um die meisten der auftretenden Terme durch das Störungsfeld zum Anfangszeitpunkt auszudrücken. Damit hängt der Krümmungsskalar in erster Ordnung offensichtlich nur von der Anfangsstörung ab, es gilt

$${}^{(1)}R = -\frac{4}{a^2}P^k{}_{[k}{}^{l]}{}_{|l]} = -\frac{4}{a^2}\dot{P}^k{}_{[k}{}^{l]}{}_{|l]} \quad (2.150)$$

In dieser Form wird besonders deutlich, dass durch die geeignete Wahl der anfänglichen Störung jeder konstant gekrümmte Raum dargestellt werden kann. Die Hamiltonbedingung in erster Ordnung ist dann

$$H\dot{P} + 4\pi G\varrho_H P = \frac{1}{a^2}\dot{P}^k{}_{[k}{}^{l]}{}_{|l]} \quad (2.151)$$

Nun können die sechs Entwicklungsgleichungen (2.102) und (2.105) des Lagrange-Einstein-Systems behandelt werden. Die homogenen Gleichungen reduzieren sich auf die Spur und führen, mit (2.147), auf Friedmanns Volumenexpansionsgesetz

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\varrho_H + \Lambda \quad (2.152)$$

wo $\varrho_H = \varrho_{H0}/a^3$ wieder die homogene Hintergrunddichte ist. Die Gleichungen erster Ordnung werden so zu

$$\ddot{P}^i{}_j + 3H\dot{P}^i{}_j + H\dot{P}\delta^i{}_j + 4\pi G\varrho_H P\delta^i{}_j = -{}^{(1)}R^i{}_j \quad (2.153)$$

und mit Hilfe der Hamiltonbedingung (2.148) ergibt sich

$$\ddot{P}^i{}_j + 3H\dot{P}^i{}_j - \frac{1}{3}H\dot{P}\delta^i{}_j - \frac{4\pi G}{3}\varrho_H P\delta^i{}_j = -{}^{(1)}\tau^i{}_j \quad (2.154)$$

wo mit ${}^{(1)}\tau^i{}_j \equiv {}^{(1)}R^i{}_j - \frac{1}{3}{}^{(1)}R\delta^i{}_j$ der spurfreie Teil des 3-Ricciensors bezeichnet wird. Die Raychaudhuri-Gleichung im Störungsschema erster Ordnung nimmt die folgende Form an,

$$\ddot{P} + 2H\dot{P} - 4\pi G\varrho_H P = 0 \quad (2.155)$$

Eine andere nützliche Form der skalaren Gleichung ebenfalls in erster Ordnung entsteht, wenn im Spurteil von (2.153) der Term $3H\dot{P}$ mit Hilfe der Hamiltonbedingung anstelle des Krümmungsskalars verwendet wird. Denn weil die skalare Krümmung in erster Ordnung ${}^{(1)}R$ nur vom anfänglichen Störungsfeld abhängt, kann er ersetzt werden, indem die Gleichung zum An-

fangszeitpunkt $t = t_0$ betrachtet wird. Die alternative Spurgleichung ist dann

$$\ddot{P} + 3H\dot{P} = \frac{1}{a^2}(\ddot{P}(t_0) + 3H(t_0)\dot{P}(t_0)) \quad (2.156)$$

Es sei angemerkt, dass diese Gleichung zur Raychaudhuri-Gleichung (2.155) äquivalent ist, obwohl durch die partikuläre Lösung der nun inhomogenen Gleichung ein zusätzlicher dritter Term in der allgemeinen Lösung auftritt. Dieser Term führt, wie später gezeigt wird, zu einer sehr überzeugenden Form der Coframes, wie sie auch im Newtonschen Fall auftritt. Nach Auffassung des Verfassers muss (2.156) daher als natürliche Wahl für die Spurgleichung betrachtet werden, selbst wenn (2.155) die bekanntere Gleichung darstellt. Coframes, die mit Hilfe von (2.155) bestimmt werden, liegen zunächst in einer anderen Form vor, können aber ebenfalls leicht auf die mit Hilfe von (2.156) bestimmte Form gebracht werden.

Schließlich nimmt der spurfreie Teil (2.105) der Entwicklungsgleichungen folgende elegante Form an,

$$\ddot{\Pi}^i_j + 3H\dot{\Pi}^i_j = -^{(1)}\tau^i_j \quad (2.157)$$

wo als $\Pi^i_j \equiv P^i_j - \frac{1}{3}P\delta^i_j$ der spurfreie Teil des Störungsfeldes bezeichnet wird. Dieser letzte Satz an Gleichungen steht in engem Zusammenhang zum Thema Gravitationswellen, siehe dazu auch MATARRESE und TERRANOVA (1996)(2), die allerdings einen Faktor 2 statt hier 3 in ihrer Gleichung haben. Nach Meinung des Verfassers ist eine weitere Forschung auf dem Gebiet der Gravitationswellen ausgehend von der hier gegebenen und der entsprechenden Gleichung im Rahmen der Zel'dovich-Approximation von großem Interesse.

Die Gleichung nimmt eine klarere Form an, wenn der spurfreie Teil des Riccitorsors $^{(1)}\tau^i_j$ mit (2.149) und (2.150) durch das Störungsfeld ausgedrückt und – analog zum Vorgehen zur Ableitung der alternativen Form der Spurgleichung – die Gleichung zur Anfangszeit in Betracht gezogen wird. Dies resultiert in

$$\ddot{\Pi}_{ij} + 3H\dot{\Pi}_{ij} + \frac{1}{a^2}(\Pi_{|ij} - \Pi_{ij}^{|k}{}_{|k}) = \frac{1}{a^2}\mathcal{C}_{ij} \quad (2.158)$$

wobei \mathcal{C} eine von der Anfangsstörung abhängende Konstante ist,

$$\mathcal{C}_{ij} = \ddot{\Pi}_{ij}(t_0) + 3H(t_0)\dot{\Pi}_{ij}(t_0) + \Pi_{|ij}(t_0) - \Pi_{ij}^{|k}{}_{|k}(t_0)$$

Damit sind sechs der neun Gleichungen bestimmt, die die Entwicklung des

Störungsfeldes in erster Ordnung beschreiben. Als die noch ausstehenden drei Gleichungen können (2.145) identifiziert werden, die auch auftreten, wenn (2.94) als Satz von neun Gleichungen aufgefasst und ihr antisymmetrischer Teil betrachtet wird.

2.4.2 Der Weyltensor in erster Ordnung

Der Vollständigkeit halber sollen auch die beiden Teile des Weyltensors in erster Ordnung bestimmt werden. Der elektrische Teil wird hier zu

$$^{(1)}E^i_j = {}^HE^i_j - \ddot{P}^i_j - 2H\dot{P}^i_j + \frac{4\pi G\rho_H}{3}P\delta^i_j \quad (2.159)$$

wo ${}^HE^i_j$ der homogene elektrische Teil ist,

$${}^HE^i_j = -\frac{\ddot{a}}{a}\delta^i_j - \frac{1}{3}(4\pi G\rho_H - \Lambda)\delta^i_j \quad (2.160)$$

Dabei reproduziert der letztere, homogene Anteil gerade wieder die Friedmanngleichung des vorigen Abschnittes, wohingegen der Störungsteil in erster Ordnung wie gewohnt das (Gezeiten-)Subsystem der ADM-Gleichungen wiedergibt,

$$^{(1)}E^k_k = 0 \iff (2.148) \quad (2.161)$$

$$^{(1)}E_{[ij]} = 0 \iff (2.145) \quad (2.162)$$

Der magnetische Teil des Weyltensors dagegen hat wegen der in ihm auftretenden räumlichen Ableitung keinen homogenen Anteil, ${}^HH^i_j = 0$. Er nimmt mit (2.145) folgende Form an,

$$^{(1)}H^i_j = -\frac{1}{a}\epsilon^{ikl}\dot{P}_{jk|l} \quad (2.163)$$

Die Bedingung der Spurfreiheit ergibt (2.145) und die Symmetriebedingung reproduziert wie gewohnt die Impulsconstraints,

$$^{(1)}H^k_k = 0 \iff (2.145) \quad (2.164)$$

$$^{(1)}H_{[ij]} = 0 \iff (2.146) \quad (2.165)$$

In erster Ordnung werden die Beziehungen zwischen den beiden Teilen des Weyltensors sowie dem Scherungstensor und dem Riccitensor noch einmal wesentlich vereinfacht. Unter Verwendung des Scherungstensors in erster

Ordnung,

$${}^{(1)}\sigma^i_j = \dot{P}^i_j - \frac{1}{3}\dot{P}\delta^i_j \quad (2.166)$$

nimmt (2.116) als spurfreie Gleichung folgende Form an,

$${}^{(1)}E^i_j = -{}^{(1)}\dot{\sigma}^i_j - 2H {}^{(1)}\sigma^i_j \quad (2.167)$$

Ebenso wird (2.130) zu

$$\epsilon^{mkl}(\delta_{mi} {}^{(1)}H_{jk||l} + \delta_{mj} {}^{(1)}H_{ik||l}) = -\frac{1}{a} {}^{(1)}\dot{R}_{ij} \quad (2.168)$$

2.4.3 Die allgemeine Lösung für den Spurteil

In diesem Abschnitt wird die allgemeine Lösung für die Spurgleichung (2.155) entwickelt. Die homogene Friedmanngleichung (2.152) bestimmt den Skalenfaktor $a(t)$. Mit diesem kann die Zeitableitung von den räumlichen Funktionen separiert werden, indem folgender Ansatz aufgestellt wird,

$$P^a_i(X, t) = {}^0Q^a_i(X) + q_1(t) {}^1Q^a_i(X) + q_2(t) {}^2Q^a_i(X) \quad (2.169)$$

wo die beiden Zeitfunktionen $q_{1/2}(t)$ die Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$\ddot{q} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{q} + \left(3\frac{\ddot{a}}{a} - \Lambda\right)(q + 1) = 0 \quad (2.170)$$

sind. Der erste Teil des Ansatzes spiegelt das nichtverschwindende Störungsfeld zum Anfangszeitpunkt wider, das durch die hier verwendete Wahl der Koordinaten ebenso in Betracht gezogen werden muss wie seine zeitlichen ersten und zweiten Ableitungen. Mit dem Ansatz und seinen Zeitableitungen

$$\dot{P}^a_i = \dot{q}_1 {}^1Q^a_i + \dot{q}_2 {}^2Q^a_i \quad \text{sowie} \quad \ddot{P}^a_i = \ddot{q}_1 {}^1Q^a_i + \ddot{q}_2 {}^2Q^a_i$$

sind die räumlichen Funktionen, ausgedrückt durch die Anfangswerte der Zeitableitungen der Störungen,

$${}^1Q^a_i = + \frac{\dot{q}_2(t_0)\ddot{P}^a_i(t_0) - \ddot{q}_2(t_0)\dot{P}^a_i(t_0)}{\ddot{q}_1(t_0)\dot{q}_2(t_0) - \dot{q}_1(t_0)\ddot{q}_2(t_0)} \quad (2.171)$$

$${}^2Q^a_i = - \frac{\dot{q}_1(t_0)\ddot{P}^a_i(t_0) - \ddot{q}_1(t_0)\dot{P}^a_i(t_0)}{\ddot{q}_1(t_0)\dot{q}_2(t_0) - \dot{q}_1(t_0)\ddot{q}_2(t_0)} \quad (2.172)$$

sowie

$${}^0Q^a_i = P^a_i(t_0) - q_1(t_0) {}^1Q^a_i - q_2(t_0) {}^2Q^a_i \quad (2.173)$$

Die „abweichenden“ Coframes in erster Ordnung lassen sich damit schreiben als

$$^{(1)}\tilde{\eta}_i^a = \dot{\eta}_i^a + (q_1(t) - q_1(t_0))^1 Q_i^a + (q_2(t) - q_2(t_0))^2 Q_i^a \quad (2.174)$$

wobei mit $\dot{\eta}_i^a \equiv \delta_i^a + P_i^a(t_0)$ die Coframes zur Anfangszeit bezeichnet werden. Wenn statt der Spurgleichung (2.155) die alternative (inhomogene) Gleichung (2.156) gelöst wird, tritt automatisch diese Form der Coframes auf, da dort drei Lösungen für die Anfangsdaten $P_i^a(t_0)$, $\dot{P}_i^a(t_0)$ und $\ddot{P}_i^a(t_0)$ zur Verfügung stehen. Im Beispiel im nächsten Abschnitt wird das deutlich, wenn dort (2.156) explizit gelöst wird.

Schließlich seien die Pekuliargrößen u_i^a (Pekuliargeschwindigkeit) und w_i^a (Pekuliarbeschleunigung) definiert durch

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i^a &= H\eta_i^a + u_i^a & \text{mit} & \quad u_i^a \equiv a\dot{P}_i^a \\ \ddot{\eta}_i^a &= \frac{\ddot{a}}{a}\eta_i^a + w_i^a & \text{mit} & \quad w_i^a \equiv a\ddot{P}_i^a + 2\dot{a}\dot{P}_i^a \end{aligned}$$

Ihre Beziehungen zu den räumlichen Funktionen Q_i^a schreiben sich als

$$w_i^a - \left(2H + \frac{\ddot{q}_2}{\dot{q}_2}\right)u_i^a = a \frac{\ddot{q}_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1\ddot{q}_2}{\dot{q}_2} {}^1Q_i^a \quad (2.175)$$

$$w_i^a - \left(2H + \frac{\ddot{q}_1}{\dot{q}_1}\right)u_i^a = -a \frac{\ddot{q}_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1\ddot{q}_2}{\dot{q}_1} {}^2Q_i^a \quad (2.176)$$

so dass nun die Coframes erster Ordnung durch die pekuliaren Größen ausgedrückt werden können. Damit ist die Grundlage für eine relativistische Verallgemeinerung der Zel'dovich-Näherung gelegt. Im nächsten Abschnitt wird die allgemeine Lösung für Störungen erster Ordnung gemäß Zel'dovichs ursprünglicher Vorgehensweise eingeschränkt und damit seine Näherung auf den relativistischen Fall übertragen.

2.5 Relativistische Zel'dovich-Approximation

Zunächst scheint ein Kommentar zur Wahl des hier verwendeten Ausdrucks „Relativistische Zel'dovich-Approximation“ (RZA) angebracht, um von vornherein Konfusionen zu vermeiden, die durch abweichende Definitionen in anderen Arbeiten zu diesem Thema auftreten können.

KASAI (1995) und weitere Autoren regten an, das relativistische Deformationsfeld analog zum Lagrangeschen Deformationsgradienten des Newtonschen Trajektorienfelds (2.55) zu benutzen.³⁸ Während das Dichtefeld von

³⁸ Siehe auch CROUDACE et al. (1994), sowie ELLIS und TSAGAS (2002), die entsprechend

diesen Autoren durch das exakte Integral (2.87) mit Hilfe des relativistischen Deformationsfeldes berechnet wird, ganz im Einklang mit dem Newtonschen Fall (2.49), werden von ihnen jedoch für die räumliche Metrik, den räumlichen Riccitenor sowie Krümmungsskalar und die anderen Feldgrößen weiterhin diejenigen des strikt linearisierten Schemas verwendet.

Um nun zu verdeutlichen, inwieweit der vom Verfasser vertretene Standpunkt vom eben beschriebenen abweicht, sei an Zel'dovichs ursprüngliche Extrapolationsidee erinnert, die seiner Näherung zugrunde liegt (ZEL'DOVICH [1970][1]; ZEL'DOVICH [1970][2]; ZEL'DOVICH [1978]), und an ihre Verbindung zur exakten Definition dieser Approximation im Rahmen der Lagrangeschen Störungstheorie, wie sie in BUCHERT (1989) und BUCHERT (1992) für den Newtonschen Fall hergestellt wird. Zel'dovich benutzte in der Tat das exakte Integral für das Dichtefeld im Lagrangebild der Fluidbewegung, das im Kontext träger Kontinua wohluntersucht war, und glich die Koeffizientenfunktionen in diesem Integral so an, dass dessen Linearisierung auf einer homogen-isotropen Hintergrundkosmologie gerade dem Ergebnis der Eulerschen linearen Störungstheorie entsprach, siehe dazu ZEL'DOVICH und MYSHKIS (1973). Er betrachtete dazu lediglich die anwachsende Mode der Lösung, die asymptotisch die Parallelitätsbedingung (2.178) stützt. Während Zel'dovich die exakte Lösung für ein träges Kontinuum mit der linearisierten Lösung gravitativer Instabilität kombinierte, zeigten DOROSHKEVICH, RYABENKII und SHANDARIN (1973), dass dieser Ansatz für das Traktorienfeld auch selbstkonsistent der Divergenzgleichung für die pekulare Feldstärke genügt.

2.5.1 Vorüberlegung und Definition

Es ist nun naheliegend, Zel'dovichs Extrapolationsidee direkt auf die Bewegung eines selbstgravitierenden Mediums im Rahmen der relativistischen Lagrangeschen Betrachtungsweise anzuwenden. Eine Konsequenz der hier gegebenen Definition der Relativistischen Zel'dovich-Approximation wird sein, dass alle Feldvariablen ohne Linearisierung als Funktional der linearisierten Coframes bestimmt werden, wie das im Newtonschen Fall von BUCHERT (1989) durchgeführt wurde. Nach Auffassung des Verfassers reflektiert dieser Zugang am besten Zel'dovichs ursprüngliche Idee. Würden dagegen die einzelnen Funktionale linearisiert, wie etwa die Metrik, die ja ein quadratisches

dem Ansatz von Zel'dovich eine voll kovariante Beschreibung der pekularen Bewegung eingeführt haben. Zur relativistischen „Zel'dovich-Approximation“ in sphärisch symmetrischen Modellen siehe MORITA, NAKAMURA und KASAI (1998)(1) sowie MORITA, NAKAMURA und KASAI (1998)(2).

Funktional des Deformationsfeldes ist, würde das lediglich die wohlbekannten Resultate der linearisierten Einsteingleichungen reproduzieren.

Innerhalb einer vollständigen Lagrangeschen Störungstheorie löst das Trajektorienfeld (2.55) das volle Lagrange-Newton-System (2.21, 2.22) bis zur ersten Ordnung, wobei es wichtig ist zu unterstreichen, dass dieses letztere System den Deformationsgradienten $f^a|_i$ als einzige dynamische Feldvariable enthält. Dieser Umstand erlaubt, die Lösung erster Ordnung des Lagrange-Newton-Systems als Input für andere Felder zu betrachten, die, wie im Falle des Dichteintegrals, lediglich funktionale Definitionen sind und für jedes gegebene Trajektorienfeld ausgewertet werden können.

Gemäß dieser Bemerkung war als eines der Ziele der vorliegenden Arbeit ausgegeben, die Einsteinschen Gleichungen für eine einzige Feldvariable, die nichtintegrablen Deformationskoeffizienten η^a_i , zu formulieren. Die aus der linearisierten Theorie gewonnenen Lösungen dienen nun als Input für alle von den Deformationskoeffizienten abhängigen Funktionale. Damit wird u.a. sicher gestellt, dass Abstände richtig gemessen werden, indem die zweite Ordnung der Metrik in den Störungen nicht vernachlässigt wird. Ähnliche Überlegungen gelten für andere Feldgrößen.

Definiton: „Relativistische Zel’dovich-Approximation“ (RZA)

Wir betrachten zunächst die neun Funktionen in den Coframe-Koeffizienten als alleinige Variablen im vollständigen Satz an ADM-Gleichungen für das Materiemodell „rotationsfreier Staub“ in einer fluss-orthogonalen Foliation der Raumzeit, (2.101)-(2.105). Dann betrachten wir die allgemeine Lösung für diese Koeffizienten im Störungsschema erster Ordnung. Die Approximation „RZA“ besteht nun im exakten Bestimmen jeder anderen Feldgröße als ein Funktional der linearisierten Lösung, ohne jegliche weitere Näherung oder Vernachlässigung höherer Ordnungen.

Zur Umsetzung dieser Definition soll im Folgenden eine Einschränkung der Lösung erster Ordnung hergeleitet werden, die der Newtonschen Form der Zel’dovich-Näherung entspricht. Dazu wird die allgemeine Lösung der Gleichungen erster Ordnung zunächst auf den skalaren (Spur-)Teil (2.174) beschränkt. Diese wird der Bedingung

$${}^2Q^a_i(X) = 0 \quad (2.177)$$

unterworfen, d.h. es wird lediglich die anwachsende Mode in Betracht gezogen, während die fallende Mode vernachlässigt wird. Damit liefert (2.176)

folgende Zel'dovich-Beschränkung für die pekuliaren Felder,

$$w_i^a = \left(2H + \frac{\ddot{q}_1}{\dot{q}_1}\right) u_i^a \quad (2.178)$$

Ausgedrückt durch die Anfangsbedingungen für das Störungsfeld mit Hilfe von (2.172) ist der entsprechende Ausdruck

$$\ddot{P}_i^a(X, t_0) = \frac{\ddot{q}_1(t_0)}{\dot{q}_1(t_0)} \dot{P}_i^a(X, t_0) \quad (2.179)$$

Mit dieser Einschränkung nimmt die räumliche Funktion zur wachsenden Mode die Form

$${}^1Q_i^a(X) = \frac{1}{\dot{q}_1(t_0)} \dot{P}_i^a(X, t_0) \quad (2.180)$$

an, und für die „abweichenden“ Coframes tritt folgender Ausdruck auf,³⁹

$${}^{RZA}\tilde{\eta}_i^a(X, t) = \delta_i^a + P_i^a(X, t_0) + \xi(t) \dot{P}_i^a(X, t_0) \quad (2.181)$$

mit der nur von der Zeit abhängenden Funktion

$$\xi(t) \equiv \frac{q_1(t) - q_1(t_0)}{\dot{q}_1(t_0)} \quad (2.182)$$

Bis auf den Term, der aufgrund der nichtverschwindenden Anfangsstörung auftritt, ist dieser Ausdruck wohlbekannt aus Abschnitt 2.2.2 über Newtonsche Dynamik. Der entsprechende Ausdruck für das Abweichungsfeld p_i^a nimmt wegen $\dot{P}_i^a(X, t_0) = \dot{p}_i^a(X, t_0) - H(t_0) p_i^a(X, t_0)$ hier die folgende Form an,

$${}^{RZA}\tilde{\eta}_i^a(X, t_0) = \delta_i^a + (1 - H(t_0)) p_i^a(X, t_0) + \xi(t) \dot{p}_i^a(X, t_0) \quad (2.183)$$

Weiterhin wird an dieser Stelle vorgeschlagen, den hier aufgezeigten Weg zur extrapolierenden Näherung RZA auf die allgemeine Lösung der Störungsrechnung erster Ordnung inklusive des spurfreien Teils auszudehnen, wobei letzterer wie im letzten Abschnitt beschrieben nach Auffassung des Verfassers zu einer nichtlinearen Approximation für Gravitationswellen führen kann, siehe dazu auch MATARRESE und TERRANOVA (1996)(2).

³⁹ An dieser Stelle sollte daran erinnert werden, dass die „abweichenden“ Coframes durch $\eta_i^a(X, t) = a(t) \tilde{\eta}_i^a(X, t)$ definiert worden waren.

2.5.2 Die funktionale Berechnung der Feldvariablen

Als Konsequenz obiger Definition sollen hier einige der relevanten Felder, wie Metrik, Dichte und kinematische Variablen, als Funktionale der RZA-Coframes dargestellt werden. Da $a(t)$ und $\xi(t)$ die einzigen zeitabhängigen Größen sind, bieten sich für diesen Abschnitt folgende Kurzschreibweisen an,

$$P_i^a \equiv P_i^a(X, t_0) \quad \text{und} \quad \dot{P}_i^a \equiv \dot{P}_i^a(X, t_0) \quad (2.184)$$

Wie in der Definition beschrieben, wird das RZA-Coframefeld

$${}^{RZA}\eta_i^a(X, t) = a(t)(\overset{\circ}{\eta}_i^a + \xi(t)\dot{P}_i^a) \quad (2.185)$$

in die exakten Ausdrücke für die Feldgrößen eingesetzt, wobei $\overset{\circ}{\eta}_i^a = \delta_i^a + P_i^a$ das Coframefeld zum Anfangszeitpunkt beschreibt. Die Symmetriebedingung (2.101) wird damit z.B. direkt auf

$$(2H\dot{\xi} + \ddot{\xi})(\dot{P}_{[ij]} + \delta_{ab}\dot{P}_{[i}^a P_{j]}^b) = 0 \quad (2.186)$$

extrapoliert. Die dreidimensionale räumliche Metrik wird so zu folgender (quadratischer) RZA-Metrik,

$${}^{RZA}g_{ij} = a^2\delta_{ab}[\overset{\circ}{\eta}_i^a\overset{\circ}{\eta}_j^b + \xi(\overset{\circ}{\eta}_i^a\dot{P}_j^b + \overset{\circ}{\eta}_j^a\dot{P}_i^b) + \xi^2\dot{P}_i^a\dot{P}_j^b] \quad (2.187)$$

Die meisten der übrigen Felder nehmen allerdings keine einfach zu lesende Form an, da sie höherer Ordnung sind. Um nun auch diese Felder angemessen kurz darstellen zu können, werden zunächst – gewissermaßen als Verallgemeinerung der skalaren Invarianten – die folgenden Größen festgelegt,

$$\begin{aligned} {}^{(0)}I_j^i &\equiv \frac{1}{6}\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\overset{\circ}{\eta}_j^a\overset{\circ}{\eta}_k^b\overset{\circ}{\eta}_l^c \quad ; \quad {}^{(0)}J_j^i \equiv \frac{1}{6}\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\overset{\circ}{\eta}_j^a\overset{\circ}{\eta}_k^b\overset{\circ}{\eta}_l^c \\ {}^{(1)}I_j^i &\equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\dot{P}_j^a\overset{\circ}{\eta}_k^b\overset{\circ}{\eta}_l^c \quad ; \quad {}^{(1)}J_j^i \equiv \frac{1}{6}\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\dot{P}_j^a\overset{\circ}{\eta}_k^b\overset{\circ}{\eta}_l^c + \frac{1}{3}\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\overset{\circ}{\eta}_j^a\dot{P}_k^b\overset{\circ}{\eta}_l^c \\ {}^{(2)}I_j^i &\equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\dot{P}_j^a\dot{P}_k^b\overset{\circ}{\eta}_l^c \quad ; \quad {}^{(2)}J_j^i \equiv \frac{1}{3}\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\dot{P}_j^a\dot{P}_k^b\overset{\circ}{\eta}_l^c + \frac{1}{6}\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\overset{\circ}{\eta}_j^a\dot{P}_k^b\dot{P}_l^c \\ {}^{(3)}I_j^i &\equiv \frac{1}{6}\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\dot{P}_j^a\dot{P}_k^b\dot{P}_l^c \quad ; \quad {}^{(3)}J_j^i \equiv \frac{1}{6}\epsilon_{abc}\epsilon^{ikl}\dot{P}_j^a\dot{P}_k^b\dot{P}_l^c \end{aligned}$$

Natürlich gilt ${}^{(0)}I_j^i = {}^{(0)}J_j^i$ und ${}^{(3)}I_j^i = {}^{(3)}J_j^i$. Die beiden Sets ${}^{(n)}I_j^i$ und ${}^{(n)}J_j^i$ stimmen außerdem paarweise in ihrer Spur überein, die ihrerseits einfach die Funktionaldeterminante der jeweiligen Größen darstellt. Der Nutzen dieser Definitionen wird sofort deutlich, wenn die Transformationsdeterminante von der Koordinaten- zur Nichtkoordinaten-Basis in der relativistischen

Zel'dovich-Approximation ausgedrückt werden soll. Sie ist nämlich⁴⁰

$${}^{RZA}J = a^3 (J_0 + \xi J_1 + \xi^2 J_2 + \xi^3 J_3) = a^3 \sum \xi^n J_n \quad (2.188)$$

wobei als $J_n \equiv {}^{(n)}J_k^k$ die jeweilige Spur der oben eingeführten Größen bezeichnet wird. Im homogenen Fall, d.h. für verschwindende anfängliche Störungen, gilt ${}^HJ_0 = 1$, während sich ${}^HJ_1, {}^HJ_2, {}^HJ_3$ auf die bekannten skalaren Invarianten für $\dot{P}_i^a(t_0)$ reduzieren.

Damit kann die nichtlinear entwickelte Dichte mit Hilfe ihres exakten Integrals bestimmt werden, sie nimmt die Form

$${}^{RZA}\varrho = \frac{\dot{\varrho} J}{{}^{RZA}\tilde{J}} = \frac{\varrho_H(t)}{\varrho_H(t_0)} \dot{\varrho}(\vec{X}) \frac{\tilde{J}}{{}^{RZA}\tilde{J}} \quad (2.189)$$

an, wobei ${}^{RZA}\tilde{J} \equiv \det({}^{RZA}\tilde{\eta}_i^a) = J_0 + \xi J_1 + \xi^2 J_2 + \xi^3 J_3 = \sum \xi^n J_n$ für das „abweichende“ Coframefeld (2.181) berechnet wird und \tilde{J} die Determinante der Transformation zur Anfangszeit ist.

Die orthonormale Vektorbasis, das „Frame“, ist dann im RZA-Bild

$${}^{RZA}e_a^i = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{2{}^{RZA}\tilde{J}} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} (\dot{\eta}_k^b \dot{\eta}_l^c + 2\xi \dot{\eta}_k^b \dot{P}_l^c + \xi^2 \dot{P}_k^b \dot{P}_l^c) \right] \quad (2.190)$$

so dass die Orthonormalitätsbedingung für die η_i^a und e_a^i nun

$${}^{RZA}e_a^i {}^{RZA}\eta_j^a = 3 \cdot \frac{\sum \xi^n {}^{(n)}J_j^i}{\sum \xi^n J_n} \quad (2.191)$$

lautet, was wie erwartet zur Spur ${}^{RZA}e_a^k {}^{RZA}\eta_k^a = 3$ führt.

Mit den RZA-Coframes und ihren zeitlichen Ableitungen

$${}^{RZA}\eta_i^a = a(\delta_i^a + P_i^a + \xi \dot{P}_i^a) \quad (2.192)$$

$${}^{RZA}\dot{\eta}_i^a = H\eta_i^a + a\dot{\xi}\dot{P}_i^a = \dot{a}\delta_i^a + \dot{a}P_i^a + \frac{d(a\xi)}{dt}\dot{P}_i^a$$

$${}^{RZA}\ddot{\eta}_i^a = \frac{\ddot{a}}{a}\eta_i^a + 2\dot{a}\dot{\xi}\dot{P}_i^a + a\ddot{\xi}\dot{P}_i^a = \ddot{a}\delta_i^a + \ddot{a}P_i^a + \frac{d^2(a\xi)}{dt^2}\dot{P}_i^a$$

⁴⁰ Sofern nicht anders angegeben, erstrecken sich durch das Summenzeichen angegebene Summationen in diesem Abschnitt immer von $n = 0$ bis 3.

werden die im Lagrange-Einstein-System vorkommenden Ausdrücke zu⁴¹

$$\begin{aligned}
 i) \quad & \frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \eta_j^a \eta_k^b \eta_l^c = 3 \cdot \frac{\sum \xi^{n(n)J_j^i}}{\sum \xi^n J_n} \\
 ii) \quad & \frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \dot{\eta}_j^a \eta_k^b \eta_l^c = 3H \cdot \frac{\sum \xi^{n(n)J_j^i}}{\sum \xi^n J_n} + \frac{\dot{\xi}}{\xi} \cdot \frac{\sum n \xi^{n(n)I_j^i}}{\sum \xi^n J_n} \\
 iii) \quad & \frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \eta_j^a \dot{\eta}_k^b \eta_l^c = 3H \cdot \frac{\sum \xi^{n(n)J_j^i}}{\sum \xi^n J_n} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}}{\xi} \cdot \frac{\sum n \xi^n (3^{(n)J_j^i} - {}^{(n)}I_j^i)}{\sum \xi^n J_n}
 \end{aligned} \tag{2.193}$$

mit der jeweiligen Spur

$$\begin{aligned}
 i) \quad & \frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \eta_i^a \eta_k^b \eta_l^c = 3 \\
 ii) \quad & \frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \dot{\eta}_i^a \eta_k^b \eta_l^c = 3H + \frac{\dot{\xi}}{\xi} \cdot \frac{\sum n \xi^n J_n}{\sum \xi^n J_n} \\
 iii) \quad & \frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \eta_i^a \dot{\eta}_k^b \eta_l^c = 3H + \frac{\dot{\xi}}{\xi} \cdot \frac{\sum n \xi^n J_n}{\sum \xi^n J_n}
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen gilt außerdem

$$\frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \ddot{\eta}_j^a \eta_k^b \eta_l^c = 3 \frac{\ddot{a}}{a} \cdot \frac{\sum \xi^{n(n)J_j^i}}{\sum \xi^n J_n} + \left(2H \frac{\dot{\xi}}{\xi} + \frac{\ddot{\xi}}{\xi} \right) \frac{\sum n \xi^{n(n)I_j^i}}{\sum \xi^n J_n} \tag{2.194}$$

mit der Spur

$$\frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \ddot{\eta}_i^a \eta_k^b \eta_l^c = 3 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(2H \frac{\dot{\xi}}{\xi} + \frac{\ddot{\xi}}{\xi} \right) \frac{\sum n \xi^n J_n}{\sum \xi^n J_n}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \dot{\eta}_j^a \dot{\eta}_k^b \eta_l^c = & 3H^2 \cdot \frac{\sum \xi^{n(n)J_j^i}}{\sum \xi^n J_n} + \frac{1}{2} H \frac{\dot{\xi}}{\xi} \cdot \frac{\sum n \xi^n (3^{(n)J_j^i} + {}^{(n)}I_j^i)}{\sum \xi^n J_n} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2} \cdot \frac{\sum n(n-1) \xi^{n(n)I_j^i}}{\sum \xi^n J_n}
 \end{aligned} \tag{2.195}$$

mit der Spur

$$\frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \dot{\eta}_i^a \dot{\eta}_k^b \eta_l^c = 3H^2 + 2H \frac{\dot{\xi}}{\xi} \cdot \frac{\sum n \xi^n J_n}{\sum \xi^n J_n} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2} \cdot \frac{\sum n(n-1) \xi^n J_n}{\sum \xi^n J_n}$$

⁴¹ Da sich dieser Abschnitt ausschließlich mit Berechnungen zu den RZA-Coframes ${}^{RZA}\eta_i^a = a(\delta_i^a + P_i^a + \xi \dot{P}_i^a)$ beschäftigt, werden die vorangestellten Label „RZA“ auf den folgenden beiden Seiten weggelassen, wo es der besseren Lesbarkeit dient.

Der RZA-Expansionstensor wird damit zu

$${}^{RZA}\Theta^i_j = 3H \cdot \frac{\sum \xi^n {}^{(n)}J^i_j}{\sum \xi^n J_n} + \frac{\dot{\xi}}{\xi} \cdot \frac{\sum n \xi^n {}^{(n)}I^i_j}{\sum \xi^n I_n} \quad (2.196)$$

und seine Spur, die Expansionsrate ist hier

$${}^{RZA}\Theta = 3H + \frac{\dot{\xi}}{\xi} \cdot \frac{\sum n \xi^n I_n}{\sum \xi^n I_n} = 3H + \frac{\dot{\xi}}{\xi} \cdot \frac{\xi J_1 + 2\xi^2 J_2 + 3\xi^3 J_3}{{}^{RZA}\tilde{J}} \quad (2.197)$$

Schließlich seien noch Ausdrücke für die beiden Teile des Weyltensors in der RZA angegeben. Der elektrische Teil ist

$${}^{RZA}E^i_j = -3\frac{\ddot{a}}{a} \cdot \frac{\sum \xi^n {}^{(n)}J^i_j}{\sum \xi^n J_n} - \left(\frac{\ddot{\xi}}{\xi} + 2H\frac{\dot{\xi}}{\xi} \right) \cdot \frac{\sum n \xi^n {}^{(n)}I^i_j}{\sum \xi^n I_n} - \frac{1}{3} \left(4\pi G \frac{\dot{\rho} \tilde{J}}{{}^{RZA}J} - \Lambda \right) \delta^i_j \quad (2.198)$$

und seine Beziehung zum Scherungstensor nimmt die folgende Form an

$$\begin{aligned} {}^{RZA}E^i_j = & - {}^{RZA}\dot{\sigma}^i_j - 2H {}^{RZA}\sigma^i_j - \frac{2}{3} \frac{\dot{\xi}}{\xi} \cdot \frac{\sum n \xi^n J_n}{\sum \xi^n J_n} \cdot {}^{RZA}\sigma^i_j \\ & - {}^{RZA}\sigma^i_k {}^{RZA}\sigma^k_j + \frac{1}{3} {}^{RZA}\sigma^k_l {}^{RZA}\sigma^l_k \delta^i_j \end{aligned} \quad (2.199)$$

anstelle der einfacheren Form (2.167) im Störungsschema erster Ordnung. Schließlich ist der magnetische Teil

$${}^{RZA}H^i_j = -\frac{\dot{\xi}}{a} \epsilon^{ikl} \cdot \frac{\dot{P}_{kj||l} + \delta_{ab} (\dot{P}^a_j P^b_k + \xi \dot{P}^a_j \dot{P}^b_k)_{||l}}{\sum \xi^n J_n} \quad (2.200)$$

wobei $||$ hier die kovariante Ableitung bezüglich der RZA-Metrik (2.187) darstellt.

Mit Hilfe der oben eingeführten Größen ist es nun auch möglich, die Entwicklungsgleichungen (2.100) in der RZA auszudrücken. Sie werden zu

$$\begin{aligned} {}^{RZA}\ddot{\eta}^a_i = & \left(3H \cdot \frac{\sum n \xi^n {}^{(n)}J^k_i}{\sum \xi^n J_n} + \frac{\dot{\xi}}{\xi} \cdot \frac{\sum n \xi^n {}^{(n)}I^k_i}{\sum \xi^n I_n} \right) {}^{RZA}\dot{\eta}^a_k \\ & + \left(3H + \frac{\dot{\xi}}{\xi} \cdot \frac{\sum n \xi^n J_n}{\sum \xi^n J_n} \right) {}^{RZA}\dot{\eta}^a_i - \left(4\pi G \frac{\dot{\rho} \tilde{J}}{{}^{RZA}J} + \Lambda \right) {}^{RZA}\eta^a_i \\ = & \frac{2a}{{}^{RZA}J} \delta^{ab} \epsilon_{bcd} \epsilon^{kmn} \left(P^c_{m||[i||k]} + \xi \dot{P}^c_{m||[i||k]} \right) {}^{RZA}\eta^d_n \end{aligned} \quad (2.201)$$

2.5.3 Die RZA für einen flachen FLRW-Hintergrund

In diesem Abschnitt wird eine allgemeine Lösung für die Spurentwicklungsgleichung (2.156) im Fall eines flachen FLRW-Hintergrunds hergeleitet. So soll zum Einen noch einmal explizit gezeigt werden, dass die Lösungen der beiden Spurgleichungen (2.155) und (2.156) gleichbedeutend sind, zum Anderen soll damit die Rolle verdeutlicht werden, welche der inhomogene Anteil der Gleichung in Bezug auf die Anfangsdaten des Störungsfeldes spielt. Anschließend wird die allgemeine Lösung erster Ordnung auf die relativistische Zel'dovich-Approximation eingeschränkt und einige der oben diskutierten Größen für diese bestimmte Wahl des Modells angegeben.

Allgemeine Lösung für den Spurteil erster Ordnung

Die homogene Friedmanngleichung, eingeschränkt auf einen Einstein-de Sitter-Hintergrund, legt den Skalenfaktor fest auf

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.202)$$

Zum Lösen der inhomogenen Gleichung (2.156) wird nach Raum- und Zeitfunktionen separiert. Da die Gleichung linear und von zweiter Ordnung ist, kann die allgemeine Lösung als Superposition der beiden Lösungen der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung geschrieben werden. Es bietet sich also folgender Ansatz an,

$$P_i^a(X, t) = q_1(t) {}^1Q_i^a(X) + q_2(t) {}^2Q_i^a(X) + q_p(t) {}^pQ_i^a(X) \quad (2.203)$$

Die Zeitfunktionen $q_n(t)$, $n = 1, 2$ genügen der homogenen Gleichung, während $q_p(t)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung darstellt,

$$\ddot{q}_n + \frac{2}{t}\dot{q}_n = 0 \quad (2.204)$$

$$\ddot{q}_p + \frac{2}{t}\dot{q}_p = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{4}{3}} \left(\ddot{q}_p(t_0) + \frac{2}{t_0}\dot{q}_p(t_0) \right) \quad (2.205)$$

Für die Zeitfunktionen kann nun den Ansatz

$$q_{1/2}(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{n_{1/2}}, \quad q_p(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^p \quad (2.206)$$

aufgestellt werden. So resultieren die Exponenten in

$$n_1 = 0, \quad n_2 = -1, \quad p = \frac{2}{3}$$

Damit wird das Störungsfeld beschrieben durch

$$P_i^a(X, t) = {}^1Q_i^a(X) + \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1} {}^2Q_i^a(X) + \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} {}^pQ_i^a(X) \quad (2.207)$$

Nun sollen mit Hilfe dieses Ausdruckes die räumlichen Anteile ${}^{1/2}Q_i^a$ und ${}^pQ_i^a$ als Funktionen der Anfangsbedingungen $P_i^a \equiv P_i^a(X, t_0)$, $\dot{P}_i^a \equiv \dot{P}_i^a(X, t_0)$ und $\ddot{P}_i^a \equiv \ddot{P}_i^a(X, t_0)$ des Störungsfeldes bestimmt werden⁴². Es sind

$$\begin{aligned} {}^1Q_i^a &= -\frac{3}{2} \ddot{P}_i^a t_0^2 - 2 \dot{P}_i^a(t_0) t_0 + P_i^a \\ {}^2Q_i^a &= \frac{3}{5} \ddot{P}_i^a t_0^2 + \frac{1}{5} \dot{P}_i^a t_0 \\ {}^pQ_i^a &= \frac{9}{10} \ddot{P}_i^a t_0^2 + \frac{9}{5} \dot{P}_i^a t_0 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung zu (2.204), (2.205) ist damit, geschrieben in der Form der „abweichenden“ Coframes,

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\tilde{\eta}_i^a &= \delta_i^a + P_i^a + 2 \left[\frac{1}{10} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1} + \frac{9}{10} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \dot{P}_i^a t_0 \\ &\quad + \frac{3}{2} \left[\frac{2}{5} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1} + \frac{3}{5} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \ddot{P}_i^a t_0^2 \end{aligned} \quad (2.208)$$

Einschränkung auf die RZA

Zunächst wird Zel'dovichs Einschränkung für den flachen FLRW-Hintergrund in den beiden Formen (2.178), (2.179) bestimmt, d.h. sowohl ausgedrückt durch die pekuliaren Größen als auch durch die Anfangsstörungen. Die anwachsende Mode in (2.207) ist $q(t) = (t/t_0)^{2/3}$, also tritt mit Hilfe des Skalenfaktors (2.202) folgende erste Bedingung auf,

$$u_i^a(t_0) = w_i^a(t_0) t_0 \quad (2.209)$$

⁴² Auch in diesem und dem nächsten Abschnitt bezeichnet die Kurzschreibweise P_i^a wieder die Anfangsstörung, d.h. $P_i^a = P_i^a(X, t_0)$. Das Gleiche gilt für ihre zeitlichen Ableitungen, die zum Anfangszeitpunkt ausgewertet werden. Die einzigen zeitabhängigen Größen sind $a(t)$ und $\xi(t)$.

oder, beschrieben durch die Anfangsbedingungen des Störungsfeldes, die alternative Bedingung

$$\ddot{P}_i^a t_0 = -\frac{1}{3}\dot{P}_i^a \quad (2.210)$$

Nun wird die allgemeine Lösung erster Ordnung (2.208) obiger Zel'dovich-Einschränkung unterworfen, was in

$$\xi(t) = \frac{3}{2} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] t_0 \quad (2.211)$$

resultiert. Insbesondere ist $\dot{\xi} = (t/t_0)^{-(1/3)} = 3t_0/2 \cdot \dot{a}$. Damit nehmen die „abweichenden“ Coframes die Form

$${}^{RZA}\tilde{\eta}_i^a = \delta_i^a + P_i^a + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \dot{P}_i^a t_0 \quad (2.212)$$

an. Abgesehen von dem Term, der aufgrund der nichtverschwindenden Anfangsstörung auftritt, ist diese Form wohlbekannt aus der Newtonschen Theorie, siehe dazu auch den entsprechenden Abschnitt 2.2.2.

Im Folgenden sollen wieder ξ und die ${}^{(n)}J_j^i$ aus Abschnitt 2.5.2 über die relativistische Zel'dovich-Approximation Verwendung finden, um die Gleichungen kurz zu halten. Mit $\dot{\eta}_i^a = \delta_i^a + P_i^a$ werden schließlich die Coframes zu

$${}^{RZA}\eta_i^a = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} (\dot{\eta}_i^a + \xi \dot{P}_i^a) \quad (2.213)$$

Damit nimmt die Metrik folgende Form an,

$${}^{RZA}g_{ij} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{4}{3}} \delta_{ab} (\dot{\eta}_i^a \dot{\eta}_j^b + \xi \dot{\eta}_i^a \dot{P}_j^b + \xi \dot{\eta}_j^a \dot{P}_i^b + \xi^2 \dot{P}_i^a \dot{P}_j^b) \quad (2.214)$$

und die Transformationsdeterminante wird zu

$${}^{RZA}J = \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \sum_{n=0}^3 \xi^n J_n \quad (2.215)$$

wo wieder $J_n \equiv {}^{(n)}J_k^k$. Wie im allgemeinen Fall kann die nichtlinear entwickelte Dichte mit Hilfe ihres exakten Integrals berechnet werden,

$${}^{RZA}\varrho = \frac{\dot{\rho}\dot{J}}{{}^{RZA}J} = \frac{\varrho_H(t)}{\varrho_H(t_0)} \dot{\varrho}(\vec{X}) \frac{\dot{J}}{{}^{RZA}\tilde{J}} \quad (2.216)$$

wo ${}^{RZA}\tilde{J} \equiv \det({}^{RZA}\tilde{\eta}_i^a)$ für das „abweichende“ Coframefeld (2.212) bestimmt

wird. Für die Expansionsrate⁴³ folgt

$${}^{RZA}\Theta = 2\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1} + \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sum n \xi^{n-1} J_n}{\sum \xi^n J_n} \quad (2.217)$$

Im Fall des FLRW-Hintergrundes nimmt der RZA-Expansionstensor die Form

$${}^{RZA}\Theta^i_j = 2\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1} \frac{\sum n \xi^{n(n)} J^i_j}{\sum \xi^n J_n} + \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sum n \xi^{n-1(n)} J^i_j}{\sum \xi^n J_n} \quad (2.218)$$

an. Schließlich werden die Ausdrücke für die Teile des Weyltensors in diesem speziellen RZA-Modell angegeben. Zunächst gilt mit den zeitlichen Ableitungen von ξ insbesondere

$$H = \frac{2}{3} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\xi} + 2H\dot{\xi} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{4}{3}}$$

Der elektrische Teil ist damit

$${}^{RZA}E^i_j = -\frac{2}{3} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2} \frac{\sum n \xi^{n(n)} J^i_j}{\sum \xi^n J_n} - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{\sum n \xi^{n-1(n)} I^i_j}{\sum \xi^n I_n} - \frac{4\pi G}{3} \frac{\dot{\rho} J}{{}^{RZA}J} \delta^i_j \quad (2.219)$$

und für den magnetischen Teil findet sich

$${}^{RZA}H^i_j = -\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1} \epsilon^{ikl} \cdot \frac{\dot{P}_{kj||l} + \delta_{ab} (\dot{P}^a_j P^b_k + \xi \dot{P}^a_j \dot{P}^b_k)_{||l}}{\sum \xi^n J_n} \quad (2.220)$$

wobei \parallel die kovariante Ableitung bezüglich der speziellen RZA-Metrik (2.214) darstellt.

2.6 In der Sprache der Differentialformen

Eine sehr elegante und kompakte Darstellung des Lagrange-Einstein-Systems (2.101)-(2.105) sowie dessen Formulierung mit den Teilen des Weyltensors (2.112)-(2.115) lässt sich bei Verwendung von Differentialformen erreichen. Eine knappe Einführung zu Differentialformen findet sich in Anhang A.1.

2.6.1 Die Cartanschen Strukturgleichungen

In der Nicht-Koordinatenbasis $\{\eta^a\}$ werden dreidimensionale Riemannsche Räume durch die „Metrik“ δ_{ab} beschrieben. Wie im Anhang gezeigt wird,

⁴³ Hier und im Folgenden erstreckt sich die Summe stets über $n = 0 \dots 3$.

ist der affine Zusammenhang γ^a_{bc} in dieser Basis nicht symmetrisch in den unteren Indizes. Neben den Zusammenhangsformen $\omega^a_b \equiv \gamma^a_{cb} \eta^c$ können die Torsions- und die Krümmungs-Zweiform, \mathbf{T}^a und Ω^a_b , als

$$\mathbf{T}^a \equiv \frac{1}{2} T^a_{bc} \eta^b \wedge \eta^c \quad \text{und} \quad \Omega^a_b \equiv \frac{1}{2} R^a_{bcd} \eta^c \wedge \eta^d \quad (2.221)$$

definiert werden. Dabei sind $T^a_{bc} = \gamma^a_{bc} - \gamma^a_{cb} - 2C^a_{bc}$ der Torsionstensor und R^a_{bcd} der Riemannstensor in Nichtkoordinaten-Basis, siehe dazu auch NAKAHARA (1990), Kap. 7.8.

Die Berechnungen in den letzten Abschnitten wurden für verschwindende Torsion angestellt. Bei nichtverschwindendem Torsionstensor werden die Ausdrücke komplizierter. Sie können dann nicht mehr einfach aus den Größen der Einsteinschen Relativitätstheorie in der Koordinatenbasis durch Transformation hergeleitet werden, sondern müssen über die allgemeinen Ausdrücke der Differentialgeometrie definiert werden.

Die Geometrie dreidimensionaler Hyperflächen wird im Allgemeinen beschrieben durch die *Cartan-Strukturgleichungen*

$$\omega_{ab} + \omega_{ba} = 0 \quad (2.222)$$

$$d\eta^a + \omega^a_b \wedge \eta^b = \mathbf{T}^a \quad (2.223)$$

$$d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \Omega^a_b \quad (2.224)$$

Dabei wird (2.222) als Nullte Cartan-Strukturgleichung bezeichnet. Sie ist die Bedingung dafür, dass der affine Zusammenhang metrisch ist.⁴⁴ Zusammen mit der Ersten Cartangleichung (2.223) reproduziert sie den affinen Zusammenhang γ^a_{bc} , während die Zweite Strukturgleichung (2.224) den Riemannstensor R^a_{bcd} festlegt. Die Cartan-Strukturgleichungen lassen sich somit als Definition eben dieser γ^a_{bc} und R^a_{bcd} an den Anfang der Überlegungen stellen und daraus die geometrischen Eigenschaften des Raumes bestimmen.⁴⁵

Die Cartangleichungen (2.222)-(2.224) gelten im Fall eines nichtverschwindenden Torsionstensors $T^a_{bc} \neq 0$. Im folgenden soll aber stets, wenn nicht anders angegeben, der torsionsfreie Fall $T^a_{bc} = 0$ betrachtet werden. Hier gilt

⁴⁴ In Anhang A.2 finden sich Berechnungen zum schon bei der Einführung der Coframes erwähnten Fall $G_{ab} \neq \delta_{ab}$. Durch die alternative Form der Nullten Cartangleichung ändern sich sowohl die tensoriellen Ausdrücke für die Feldgrößen als auch derjenige der kovarianten Ableitung.

⁴⁵ Andersherum kann aber auch gezeigt werden, dass die Strukturgleichungen ebenso bei der Transformation von den bekannten Ausdrücken in der Koordinatenbasis eines metrischen Raumes zur Nichtkoordinaten-Basis gelten.

wie im letzten Abschnitt

$$C^a_{bc} = \gamma^a_{[bc]} \quad (2.225)$$

Eine noch einfachere Form nehmen die Strukturgleichungen nach der Einführung der totalen äußere Ableitung $\mathbf{D}\Phi$ einer tensorwertigen p-Form Φ vom Typ (1,1) an, siehe STRAUMANN (1984), Kap. 5.8. Diese besitzt die Komponenten

$$(\mathbf{D}\Phi)^a_b = \mathbf{d}\Phi^a_b + \omega^a_c \wedge \Phi^c_b - \omega^c_b \wedge \Phi^a_c \quad (2.226)$$

Die totale äußere Ableitung $\mathbf{D}\Phi$ ist dann eine (p+1)-Form vom Typ (1,1). Allgemein werden für tensorwertige Formen vom Typ (r,s) r Terme der obigen Form addiert und s Terme subtrahiert.⁴⁶ Für den Spezialfall einer tensorwertigen Nullform geht die totale äußere Ableitung über in die kovariante Ableitung, $(\mathbf{D}\Phi)^a_b = \Phi^a_{b||c} \eta^c$. Diese hat die Komponenten

$$\Phi^a_{b||c} = \Phi^a_{b|c} + \gamma^a_{cd} \Phi^d_b - \gamma^d_{cb} \Phi^a_d \quad (2.227)$$

Insbesondere kann jeder Tensor aufgefasst werden als Komponentenmatrix einer Nullform. Die Nullte Strukturgleichung (2.222) vereinfacht sich mit dieser Definition wegen

$$\mathbf{D}\delta_{ab} = \delta_{bc} \omega^c_a - \delta_{ac} \omega^c_b = -\omega_{ba} - \omega_{ab} \quad (2.228)$$

zu der sehr kompakten Gleichung⁴⁷

$$\mathbf{D}\delta_{ab} = 0 \quad (2.229)$$

Die torsionsfreie Erste Strukturgleichung (2.223) lautet mit derselben Definition

$$\mathbf{D}\eta^a = 0 \quad (2.230)$$

Die Zweite Strukturgleichung lässt sich nicht in einer solch einfachen Form schreiben, da die Zusammenhangsformen ω^a_b nicht tensorwertig sind.

Die Analogie der Krümmungs-Zweifform in Cartan-Schreibweise zum Riemannstensor in der Differentialgeometrie wird besonders deutlich, wenn sie

⁴⁶ Der Beweis, dass $\mathbf{D}\Phi$ allgemein eine tensorwertige (p+1)-Form ist, wird hier nicht ausgeführt. Siehe dazu Kapitel 5.8 in STRAUMANN (1984).

⁴⁷ Wie in den vorangegangenen Abschnitten sind hier orthonormale Basen gewählt. Für allgemeinere Basen, d.h. für $\delta_{ab} \rightarrow G_{ab}$ ist an dieser Stelle sehr schön zu sehen, dass (2.229) nichts anderes ist als die Bedingung $G_{ab||c} = 0$ für einen metrischen Raum.

analog zum Riemannstensor $R^a_{bcd}t_a = (\nabla_c \nabla_d - \nabla_d \nabla_c) t_b$ definiert wird als

$$\mathbf{D}\mathbf{D}t_b = -(\mathbf{d}\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b) t_a \equiv -\Omega^a_b t_a \quad (2.231)$$

Hier ist t_a eine vektorwertige Null- oder Einsform. Die Antisymmetrisierung erfolgt dabei automatisch durch das äußere Produkt, das durch zweimaliges Anwenden der totalen äußeren Ableitung entsteht. Diese Definition ist natürlich der Zweiten Strukturgleichung äquivalent und gibt die bekannte Form des Riemannstensors in der Nichtkoordinatenbasis wieder. Wird sie also auf eine Differentialform angewendet, so kann immer die einfachere Schreibweise mit $\mathbf{D}\mathbf{D}(\cdot)$ verwendet werden. Insbesondere ist, wie gleich zu sehen sein wird, $\mathbf{D}\mathbf{D}\eta^a = 0$ die erste Bianchi-Identität, mit Torsion $\mathbf{D}\mathbf{D}\eta^a = \mathbf{D}\mathbf{T}^a$.

Die Bianchi-Identitäten

Die totale äußere Ableitung der Ersten und Zweiten Strukturgleichung resultieren in den Bianchi-Identitäten $\epsilon^{jkl} R^i_{jkl} = 0$ und $\epsilon^{klm} R^i_{jkl|m} = 0$, ausgedrückt im Cartan-Formalismus. Dass nach dem (3+1)-Split überhaupt dreidimensionale Bianchi-Identitäten der obigen Form gelten, muss bei dem in dieser Arbeit verwendeten Zugang strenggenommen erst noch gezeigt werden. Das ist aber recht einfach möglich, indem die für die Reduktion von ${}^{(4)}R^i_{jkl}$ auf ${}^{(3)}R^i_{jkl}$ usw. hergeleiteten Formeln in die vierdimensionalen Bianchi-Identitäten eingesetzt werden. Aufgrund der Symmetrie des Expansionstensors verschwinden die entstehenden Zusatzterme, und es entstehen Bianchi-Identitäten der vertrauten Form. Werden die (dreidimensionalen) Cartan-Gleichungen als Definitionen benutzt, ist klar ersichtlich, dass obige Bianchi-Identitäten gelten müssen.

Die totalen äußeren Ableitungen der Cartan-Strukturgleichungen (2.223) und (2.224) nehmen für verschwindende Torsion folgende einfache Form an, vgl. NAKAHARA (1990), S. 246,

$$\mathbf{D}\mathbf{D}\eta^a = 0 \quad (1. \text{ Bianchi-Identität}) \quad (2.232)$$

$$\mathbf{D}\Omega^a_b = 0 \quad (2. \text{ Bianchi-Identität}) \quad (2.233)$$

Eine äquivalente Schreibweise der Ersten Bianchi-Identität ist

$$\Omega^a_b \wedge \eta^b = 0 \quad (2.234)$$

Im Fall eines nichtverschwindenden Torsionstensors werden die beiden Bianchi-Identitäten zu

$$\mathbf{D}\mathbf{D}\eta^a = \mathbf{D}\mathbf{T}^a \quad \text{und} \quad \mathbf{D}\Omega^a_b = 0 \quad (2.235)$$

2.6.2 Die Newtonschen Gleichungen

Vor dem Übergang zu den relativistischen Gleichungen sei an die Form des Lagrange-Newton-Cartan-Systems (2.23, 2.24) erinnert, d.h. des LNS in der Sprache der Differentialformen,

$$\delta_{ab} \mathbf{d}\ddot{f}^a \wedge \mathbf{d}f^b = 0 \quad (2.236)$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_{abc} \mathbf{d}\ddot{f}^a \wedge \mathbf{d}f^b \wedge \mathbf{d}f^c = \left(\Lambda - 4\pi G \frac{\overset{\circ}{\rho}}{J} \right) \mathbf{d}^3 f \quad (2.237)$$

Nachdem die Gezeitenform

$$\mathcal{E}^a = \mathbf{d}\ddot{f}^a - \frac{1}{3} (\Lambda - 4\pi G \rho) \mathbf{d}f^a \quad (2.238)$$

eingeführt worden war, war es möglich, die alternative Form (2.35), (2.36) anzugeben,

$$\delta_{ab} \mathcal{E}^a \wedge \mathbf{d}f^b = 0 \quad (2.239)$$

$$\epsilon_{abc} \mathcal{E}^a \wedge \mathbf{d}f^b \wedge \mathbf{d}f^c = 0 \quad (2.240)$$

2.6.3 Die Einsteinschen Gleichungen

Die weiter vorne eingeführten Cartanschen Coframes $\boldsymbol{\eta}^a = \eta^a_i \mathbf{d}X^i$ werden auch Deformations-Einsformen genannt und bilden über die Cartanschen Strukturgleichungen eine Nichtkoordinaten-Basis des dreidimensionalen Raumes. Die in dieser Arbeit benutzte Metrik ist, ausgedrückt durch die Deformationsformen

$$\mathbf{g} = \delta_{ab} \boldsymbol{\eta}^a \otimes \boldsymbol{\eta}^b \quad (2.241)$$

Die Nichtkoordinaten-Indizes a, b, \dots werden gehoben und gesenkt durch δ^{ab} bzw. δ_{ab} . Die Expansions-Einsform ist definiert durch die Paralleltransport-Gleichung (Fermi-Transport),

$$\boldsymbol{\Theta}^a \equiv \Theta^a_b \boldsymbol{\eta}^b = \dot{\boldsymbol{\eta}}^a = \dot{\eta}^a_i \mathbf{d}X^i \quad (2.242)$$

Die Zusammenhangs-Einsform $\boldsymbol{\omega}^a_b = \gamma^a_{cb} \boldsymbol{\eta}^c$ und die Krümmungs-Zweiform $\boldsymbol{\Omega}^a_b = \mathcal{R}^a_{bcd} \boldsymbol{\eta}^c \wedge \boldsymbol{\eta}^d$ als geometrischen Größen werden von den Cartanschen Strukturgleichungen (2.222)-(2.224) festgelegt und sind daher prinzipiell durch die Deformations-Einsform als einziger Variable ausdrückbar.

Das invariante Volumenelement eines metrischen Raumes kann mit Hilfe des Hodgeschen Dualitätsoperators (Sternoperators) beschrieben werden

durch

$$*1 = \frac{\sqrt{g}}{3!} \epsilon_{i_1 i_2 i_3} \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \mathbf{d}x^{i_3} = \sqrt{g} \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 \quad (2.243)$$

d.h. im hier betrachteten Fall ist

$$\boldsymbol{\eta}^1 \wedge \boldsymbol{\eta}^2 \wedge \boldsymbol{\eta}^3 = J \mathbf{d}X^1 \wedge \mathbf{d}X^2 \wedge \mathbf{d}X^3 = J \mathbf{d}^3 X \quad (2.244)$$

Die einzig durch die Deformations-Einsform ausgedrückten Gleichungen des Lagrange-Einstein-Systems (2.101)-(2.105) nehmen damit folgende Form an,

$$\delta_{ab} \ddot{\boldsymbol{\eta}}^a \wedge \boldsymbol{\eta}^b = 0 \quad (2.245)$$

$$\epsilon_{abc} \ddot{\boldsymbol{\eta}}^a \wedge \boldsymbol{\eta}^b \wedge \boldsymbol{\eta}^c = (-8\pi G \dot{\rho} + 2\Lambda J) \mathbf{d}^3 X \quad (2.246)$$

$$\epsilon_{abc} \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\eta}}^a \wedge \boldsymbol{\eta}^b = 0 \quad (2.247)$$

sowie

$$\frac{1}{2} \epsilon_{bcd} \ddot{\boldsymbol{\eta}}^a \wedge \boldsymbol{\eta}^c \wedge \boldsymbol{\eta}^d + \epsilon_{bcd} \dot{\boldsymbol{\eta}}^a \wedge \dot{\boldsymbol{\eta}}^c \wedge \boldsymbol{\eta}^d = [(4\pi G \dot{\rho} + \Lambda J) \delta_b^a - J \mathcal{R}_b^a] \mathbf{d}^3 X \quad (2.248)$$

wobei der 3-Ricci-Tensor durch die Krümmungs-Zweiform (und dadurch prinzipiell ebenfalls durch die Deformations-Einsform) ausgedrückt werden kann,

$$R^a_d \boldsymbol{\eta}^d \wedge \boldsymbol{\eta}^b \wedge \boldsymbol{\eta}^c = \delta^{db} \boldsymbol{\Omega}_d^a \wedge \boldsymbol{\eta}^c - \delta^{dc} \boldsymbol{\Omega}_d^a \wedge \boldsymbol{\eta}^b \quad (2.249)$$

Mit Hilfe des Dualitätsoperators sind können nun außerdem Einsformen für die Teile des Weyltensors eingeführt werden. Der elektrische (Gezeiten-) und der magnetische Teil sind

$$\mathbf{E}^a = \ddot{\boldsymbol{\eta}}^a - \frac{1}{3} (\Lambda - 4\pi G \rho) \boldsymbol{\eta}^a \quad (2.250)$$

$$\mathbf{H}^a = *(\delta_{bc} \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\eta}}^c \wedge \boldsymbol{\eta}^a) \boldsymbol{\eta}^b \quad (2.251)$$

Die Gegenstücke zu den Gleichungen (2.112)-(2.115) sind dann in der Sprache der Differentialformen

$$\delta_{ab} \mathbf{E}^a \wedge \boldsymbol{\eta}^b = 0 \quad (2.252)$$

$$\epsilon_{abc} \mathbf{E}^a \wedge \boldsymbol{\eta}^b \wedge \boldsymbol{\eta}^c = 0 \quad (2.253)$$

$$\delta_{ab} \mathbf{H}^a \wedge \boldsymbol{\eta}^b = 0 \quad (2.254)$$

$$\epsilon_{abc} \mathbf{H}^a \wedge \boldsymbol{\eta}^b \wedge \boldsymbol{\eta}^c = 0 \quad (2.255)$$

An dieser Stelle sollen die Gezeitengleichungen genauer betrachtet wer-

den, d.h. das durch den elektrischen Teil des Weyltensors beschreibbare Untersystem der Einsteinschen Gleichungen, (2.245) und (2.246). Diese reduzieren sich für den Fall exakter, d.h. integrierbarer, Deformations-Einsformen

$$\boldsymbol{\eta}^a = \eta^a_{|k} \mathbf{d}X^k = f^a_{|k} \mathbf{d}X^k \quad (2.256)$$

direkt auf die aus der Newtonschen Theorie bekannten Gleichungen (2.236) und (2.237). Bei Anwendung des so definierten geometrischen Grenzwerts auf die magnetische Einsform (2.251) verschwindet diese identisch, da die Expansions-Einsform $\boldsymbol{\Theta}^a = \dot{\boldsymbol{\eta}}^a$ sich auf den Newtonschen Geschwindigkeitsgradienten ${}^N\boldsymbol{\Theta}^a = \dot{f}^a_{|k} \mathbf{d}X^k = v^a_{,b} \boldsymbol{\eta}^b$ reduziert. Durch die Symmetrie der partiellen Ableitungen ist dann

$${}^N\mathbf{H}^a = \delta_{be} \epsilon^{acd} v^e_{,d,c} \boldsymbol{\eta}^b = 0 \quad (2.257)$$

2.7 Zusammenfassung

Die Rekapitulation der Definition und Herleitung der Newtonschen Zel'dovich-Näherung in Abschnitt 2.2 erlaubte es, das Verfahren konsistent und effektiv auf den allgemeinrelativistischen Fall zu übertragen. Ausgehend vom Lagrange-Newton-System, in dem die Komponenten des Abweichungsfeldes die alleinigen dynamischen Variablen darstellen, wurde hier Schritt für Schritt die allgemeine Lösung der Störungsrechnung erster Ordnung abgeleitet und auf die Zel'dovich-Näherung eingeschränkt.

Im Zuge der relativistischen Verallgemeinerung wurden in 2.3 zunächst die Einsteingleichungen in Lagrangeschen mitbewegten Koordinaten aufgestellt. Ausgehend von diesen so genannten ADM-Gleichungen wurde das Lagrange-Einstein-System (2.101)-(2.105) entwickelt, in welchem einzig die Komponenten von Cartans Coframes als dynamische Variablen auftreten. Es wurde die alternative Formulierung (2.112)-(2.115) mit dem elektrischen und magnetischen Teil des Weyltensors ebenso diskutiert wie der Newtonschen Grenzfall exakt integrierbarer Coframes. Ebenso noch in diesem Abschnitt wurde mit (2.125)-(2.129) ein abgeschlossenes hierarchisches System an Entwicklungsgleichungen für die kosmologischen Feldvariablen angegeben.

In Abschnitt 2.4 leitete ich das Störungsschema erster Ordnung sowohl für das Lagrange-Einstein-System des vorhergehenden Abschnittes als auch für die beiden Teile des Weyltensors ab. Ausgehend von einer allgemeinen Lösung für den Spurteil des Lagrange-Einstein-Systems in erster Ordnung ergab sich mit (2.174) den Ausdruck für die Coframes, der im folgenden Ab-

schnitt die Definition der relativistischen Zel'dovich-Näherung erlaubte.

Nun konnte ich in Abschnitt 2.5 eine relativistische Erweiterung der gefeierten Zel'dovich-Näherung sauber definieren, denn nach meiner Auffassung besteht die „*Approximation ‚RZA‘ [...] nun im exakten Bestimmen jeder anderen Feldgröße als ein Funktional der linearisierten Lösung, ohne jegliche weitere Näherung oder Vernachlässigung höherer Ordnungen*“, siehe Abschnitt 2.5.1. Mit Hilfe der entsprechend der Definition gebildeten Coframes (2.181) und (2.183) wurden nichtlineare Ausdrücke für die Feldvariablen angegeben und die Näherung auf den Fall eines flachen FLRW-Hintergrundes angewendet.

Der Abschnitt 2.6 schließlich verdeutlichte die Analogie der Newtonschen und relativistischen Betrachtungsweise noch einmal, indem beide Gleichungssysteme in der Sprache der Differentialformen ausgedrückt wurden.

Kapitel 3

Zur Statistik kosmischer Strukturen

Results concordant with the causes are of a type similar
to the same outcome and omnipresent [causes].
Freedom results are cessations attained through
appreciative discernment.

*Buddhist Cosmology Teachings*⁴⁸

Durch das Untersuchen morphologischer Eigenschaften sowohl von Dichtefeldern als auch von Punktmengen lassen sich viele interessante Einblicke in den Bildungsprozess von Strukturen gewinnen. Dabei erstrecken sich die Skalen, auf denen Beobachtungen angestellt werden, von der Größe einzelner Nervenzellen in der Biologie bis hin zu einigen hundert Mpc im Fall großräumiger Strukturen im Universum. Zur morphologischen Analyse solcher Datensätze werden zunächst die Minkowskifunktionale besprochen, die seit den 1990er Jahren auf vielen Gebieten erfolgreich angewandt werden. Dabei wird der Hauptaugenmerk auf der Implementierung dieser vier skalaren Maße mit Hilfe des Germ-Grain-Modells liegen. Mit dem daraus entwickelten Programmcode werden anschließend die Galaxienkataloge 2dFGRS und SDSS analysiert. Beim Vergleich des SDSS-Datensatzes DR7 mit den LasDamas Mock-Katalogen auf strukturelle Übereinstimmung hin finden sich signifikante Abweichungen der beobachteten Daten von den Λ CDM-Simulationen. Als weitere Anwendung des Codes wird der SDSS DR7 auf Nicht-Gaussische Anteile in den großräumigen Fluktuationen in der Galaxienverteilung hin untersucht. Die Ergebnisse dieses Teils der vorliegenden Arbeit sind publiziert in WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN (2014).

3.1 Grundlagen und Vorgehensweise

Durch immer detailliertere Beobachtung der Galaxienverteilung auf immer größeren Skalen konnten in den letzten Jahren einige neue großräumige Strukturen entdeckt werden (EINASTO et al. [2011]; SYLOS LABINI [2011]; PARK

⁴⁸ KONGTRUL (1995), S. 71.

et al. [2012]; CLOWES et al. [2013]; KEENAN, BARGER und COWIE [2013]; WHITBOURN und SHANKS [2014]). Um diese Beobachtung zu stützen, sind robuste statistische Werkzeuge nötig (vgl. NADATHUR [2013]; NADATHUR und HOTCHKISS [2014], und die Referenzen darin).

Die Integralgeometrie bietet zu diesen Analysen einen mathematischen Rahmen und liefert die notwendigen Werkzeuge. Denn nach dem Satz von HADWIGER (1957) genügen vier skalare Maße, die so genannten „Minkowskifunktionale“, um eine Struktur im dreidimensionalen Raum morphologisch vollständig zu bestimmen.⁴⁹

Sei \mathcal{R} die Klasse der Untermengen von \mathbb{E}^d , die aus einer endlichen Vereinigung geschlossener beschränkter konvexer Untermengen von \mathbb{E}^d , im Folgenden Körper genannt, gebildet werden kann. Jedes additive, bewegungsinvariante und bedingt stetige Funktional \mathcal{F} auf Untermengen $A \subset \mathbb{E}^d$, $A \in \mathcal{R}$, ist dann eine Linearkombination der $d + 1$ Minkowskifunktionale,

$$\mathcal{F}(A) = \sum_{\alpha=0}^d c_{\alpha} V_{\alpha}(A) \quad (3.1)$$

Der Satz von Hadwiger besagt also, dass $d + 1$ mathematische Maße bestimmt werden müssen, um die Struktur einer Punktmenge in d Dimensionen vollständig morphologisch zu analysieren. Im hier betrachteten Anwendungsfall dreidimensionaler Punktmengen bedeutet dies das Berechnen von vier Minkowskifunktionalen.

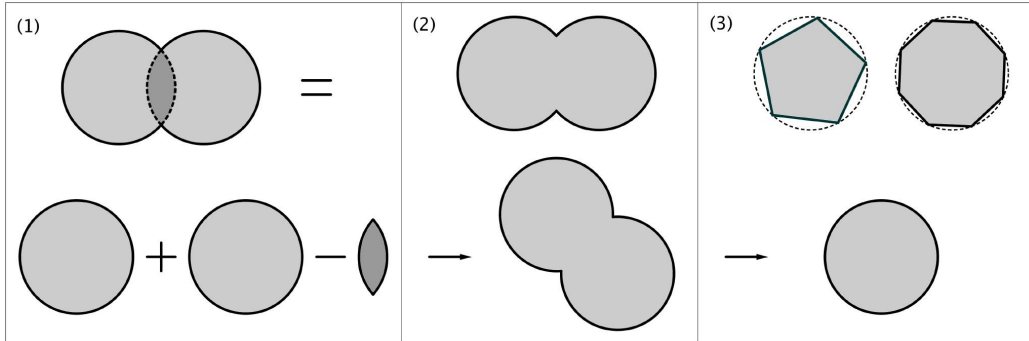


Abbildung 3.1: Zu sehen sind die Eigenschaften der Minkowskifunktionale: (1) Additivität, (2) Bewegungsinvarianz, (3) Bedingte Stetigkeit.

⁴⁹ Im Folgenden wird eine kurze Zusammenfassung der mathematischen Grundlagen zur Einführung und Interpretation der Minkowskifunktionale sowie einiger Anwendungen gegeben. Dem Leser werden als Referenz insbesondere HADWIGER (1957) sowie im Hinblick auf die Anwendung auf Galaxienkataloge speziell MECKE, BUCHERT und WAGNER (1994) und MECKE und WAGNER (1991) empfohlen.

Wie dem Satz außerdem zu entnehmen ist, haben die Minkowskifunktionale drei wesentliche Eigenschaften, siehe Abbildung 3.1, die später bei der Berechnung von Nutzen sein werden.⁵⁰

1. Additivität.

Werden je zwei Körper A und B vereinigt, $A, B \in \mathcal{R}$, so gilt

$$V_\alpha(A \cup B) = V_\alpha(A) + V_\alpha(B) - V_\alpha(A \cap B) \quad (3.2)$$

2. Bewegungsinvarianz

Der Wert eines Funktional $V_\alpha(A)$ ist unabhängig von der Lage des jeweiligen Körpers im Raum, d. h. von Ort und Ausrichtung. Für alle Translationen und Drehungen g gilt

$$V_\alpha(gA) = V_\alpha(A) \quad (3.3)$$

3. Bedingte Stetigkeit

Für eine Folge konvexer Körper $A_n \in \mathcal{R}$ mit $A_n \rightarrow A \in \mathcal{R}$ für große n , gilt

$$V_\alpha(A_n) \longrightarrow V_\alpha(A) \quad (3.4)$$

Eine explizite Darstellung der Minkowskifunktionale sowie ihre Deutung in drei oder weniger Dimensionen liefert der aus der Berechnung von z.B. Trägheitsmomenten wohlbekannte Satz von Steiner (vgl. WEIL [2000], S. 99; sowie MANGOLDT und KNOPP [1990], S. 418 zu den Trägheitsmomenten), mit dessen Hilfe sich das Volumen eines zu einem kompakten konvexen Körper K in einem Abstand ϵ parallelen Körpers K_ϵ bestimmen lässt. Der ebenfalls konvexe Körper K_ϵ bestehe also aus allen Punkten innerhalb eines Abstandes von höchstens ϵ zu K , sein Volumen ist dann durch eine Linearkombination der Quermaßintegrale $W_\alpha(K)$, $\alpha = 0, \dots, d$ gegeben,⁵¹

$$V(K_\epsilon) = \sum_{\alpha=0}^d \binom{d}{\alpha} W_\alpha(K) \epsilon^\alpha \quad (3.5)$$

⁵⁰ Zu Details siehe HADWIGER (1957), eine graphische Darstellung ähnlich der hier gegebenen findet sich bei KERSCHER et al. (1997).

⁵¹ Die von Minkowski ursprünglich eingeführten Quermaßintegrale $W_\alpha(K)$ im Satz von Steiner unterscheiden sich dabei lediglich um einen Vorfaktor von den im Satz von Hadwiger verwendeten Minkowskifunktionalen, siehe dazu Tabelle 3.2 in Abschnitt 3.2.

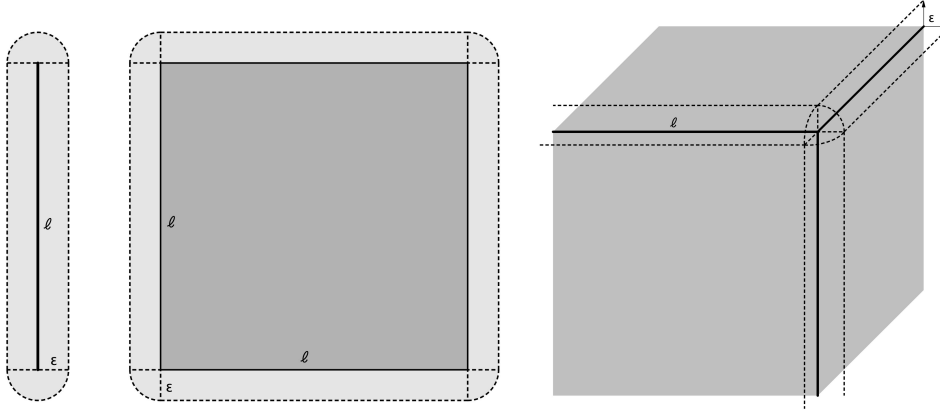


Abbildung 3.2: Parallelkörper in zwei und drei Dimensionen. Links eine Linie, deren Parallelkörper für $d = 2$ ein abgerundetes Rechteck ist, in der Mitte ein entsprechendes Quadrat. Rechts für $d = 3$ die Ecke eines Würfels.

Das Konzept der Parallelkörper wird in Abbildung 3.2 veranschaulicht. Der Parallelkörper einer Linie der Länge ℓ setzt sich aus zwei Rechtecken der Breite ϵ und zwei Halbkreisen mit entsprechendem Radius zusammen. Er hat das (zweidimensionale) Volumen

$$V_{\epsilon, \text{Linie}} = 2 \cdot \ell \epsilon + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \epsilon^2 = 0\epsilon^0 + 2\ell\epsilon^1 + \pi\epsilon^2$$

Für den Parallelkörper des Quadrats gilt entsprechend in zwei Dimensionen

$$V_{\epsilon, \text{Quadrat}} = \ell^2 + 4 \cdot \ell \epsilon + 4 \cdot \frac{\pi}{4} \epsilon^2 = \ell^2 \epsilon^0 + 4\ell\epsilon^1 + \pi\epsilon^2$$

Im dreidimensionalen Fall des Würfels mit Kantenlänge ℓ setzt sich der Parallelkörper zusammen aus dem Würfel selbst, sechs Quadern mit quadratischer Grundfläche und Höhe ϵ , drei Kreiszylindern sowie einer Kugel (acht Oktanten an den Ecken des Würfels) mit Radius ϵ ,

$$V_{\epsilon, \text{Würfel}} = \ell^3 + 6 \cdot \ell^2 \epsilon + 12 \cdot \frac{\pi}{4} \ell \epsilon^2 + 8 \cdot \frac{4}{24} \pi \epsilon^3 = \ell^3 \epsilon^0 + 6\ell^2 \epsilon^1 + 3\pi\ell \epsilon^2 + \frac{4\pi}{3} \epsilon^3$$

Am Beispiel des Würfels lässt sich in drei Dimensionen bereits die geometrische Deutung der ersten beiden Minkowskifunktionale veranschaulichen. W_0 ist hier das Volumen des Würfels, W_1 seine Oberfläche. Zu den Minkowskifunktionalen gehören neben diesen einfachen geometrischen Größen auch die integrale mittlere Krümmung einer Struktur sowie ihre Eulercharakteristik, eine aus der Topologie bekannte Größe, die den Zusammenhang einer Struktur beschreibt.

Die folgenden Überlegungen sollen auf den dreidimensionalen Fall beschränkt werden, der alle in dieser Arbeit betrachteten Anwendungen abdeckt. K und K_ϵ seien nun also kompakte konvexe Körper in \mathbb{E}^3 , deren regelmäßige Ränder ∂K und ∂K_ϵ zweidimensionale Flächen, $\partial K, \partial K_\epsilon \in \mathcal{C}^2$. Der Körper K besitze außerdem die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 . Dann ist nach MECKE, BUCHERT und WAGNER (1994) seine Oberfläche gegeben durch

$$F = \int_{\partial K} df = \int_{S^2} R_1 R_2 d\sigma \quad (3.6)$$

Die Krümmungsradien für K_ϵ sind $R_1 + \epsilon$ und $R_2 + \epsilon$, so dass sich die Oberfläche entsprechend zu

$$F_\epsilon = \int_{S^2} (R_1 + \epsilon)(R_2 + \epsilon) d\sigma = F + 2H\epsilon + G\epsilon^2 \quad (3.7)$$

berechnet. Dabei ist H die mittlere integrale Krümmung und G die mittlere Gaußsche Krümmung von ∂K , die über $G(K) = 4\pi\chi(K)$ mit der Eulercharakteristik zusammenhängt,

$$H = \frac{1}{2} \int_{\partial K} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) df \quad \text{und} \quad G = \int_{\partial K} \frac{1}{R_1 R_2} df \quad (3.8)$$

Wird nun das Volumen $V(K_\epsilon)$ berechnet, so ergibt sich wegen $\chi(K) = 1$ und $G(K) = 4\pi$ für einen einzelnen konvexen Körper folgende dreidimensionale Form der Steinerschen Formel (3.5) (MECKE, BUCHERT und WAGNER [1994]),

$$V_\epsilon = V + \int_0^\epsilon F_{\epsilon'} d\epsilon' = V\epsilon^0 + F\epsilon^1 + H\epsilon^2 + \frac{4\pi}{3}\epsilon^3 \quad (3.9)$$

In drei oder weniger Dimensionen erlauben die Minkowskifunktionale also eine einfache geometrische Interpretation, die in Tabelle 3.1 dargestellt wird.

d	1	2	3
W_0	Länge	Fläche	Volumen
W_1	Eulercharakteristik	Umfang	Oberfläche
W_2	-	Eulercharakteristik	Integrale mittlere Krümmung
W_3	-	-	Eulercharakteristik

Tabelle 3.1: Geometrische Deutung der Funktionale in d Dimensionen

In der Vergangenheit wurde zunächst die Eulercharakteristik bzw. der damit verwandte Genus genutzt, um die Topologie von Dichtefeldern sowie Punktmengen zu analysieren (MELOTT [1990], und Referenzen darin). Heute

werden die vier Minkowskifunktionale neben weiteren seit vielen Jahren gebräuchlichen Methoden wie den Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen (PEEBLES [1980]; DAVIS und PEEBLES [1983]; BAHCALL und SONEIRA [1983]) mit großem Erfolg in der statistischen Physik eingesetzt, siehe dazu MECKE und WAGNER (1991) sowie die Lecture Notes von KERSCHER (2000) und MECKE (2000). Ihr großer Vorteil besteht vor allem darin, dass sie deutlich mehr Informationen beinhalten und damit bessere Diskriminatoren darstellen als z.B. die erwähnte Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion (MARTINEZ et al. [1990]; BUCHERT und MARTINEZ [1993]).

Bisher wurden lediglich konvexe Körper betrachtet. Die gegebenen Beziehungen lassen sich aber auf den Fall solcher Strukturen verallgemeinern, die bei der Vereinigung konvexer Körper entstehen, siehe dazu MECKE, BUCHERT und WAGNER (1994). Wie im vorhergehenden Absatz erwähnt, spielt gerade die Eulercharakteristik in der statistischen und Astrophysik eine wichtige Rolle, in Abbildung 3.3 ist sie daher für eine Struktur dargestellt, wie sie aus der Vereinigung dreier konvexer Körper, hier Kugeln, entsteht. Allgemein gilt: Schneiden sich zwei Körper A und B nicht, $A \cap B = \emptyset$, ist die Eulercharakteristik der entstehenden Struktur $\chi(A \cup B) = 2$. Sobald sich A und B aber schneiden, $A \cap B \neq \emptyset$, gilt $\chi(A \cup B) = 1$. So berechnet sich für eine Struktur, die aus zwei konvexen Körpern A und B gebildet wird, die Eulercharakteristik zu

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) \quad (3.10)$$

für drei Körper wird die Beziehung schon zu

$$\chi(K_1 \cup K_2 \cup K_3) = \sum_{i=1}^3 \chi(K_i) - \sum_{i < j} \chi(K_i \cap K_j) + \chi(K_1 \cap K_2 \cap K_3) \quad (3.11)$$

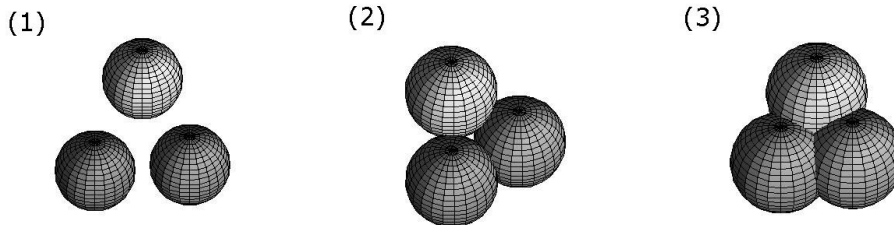


Abbildung 3.3: Die Eulercharakteristik für drei verschiedene Strukturen. So ist $\chi = 3$ (links), $\chi = 0$ (Mitte) und $\chi = 1$ (rechts).

Die Minkowskifunktionale komplexer Strukturen sind somit globale Maße, die wegen ihrer Additivität effektiv aus lokalen Beiträgen aufsummiert werden können. Sie sind darüber hinaus numerisch robust (MECKE, BUCHERT und WAGNER [1994]) und gehören damit zu den effektivsten Werkzeugen, wenn es darum geht, vermessene Strukturen mit Simulationen zu vergleichen und so unser Verständnis von der Strukturbildung im Universum zu testen.

Das Einsatzgebiet der Strukturanalyse mit Hilfe der Minkowskifunktionale reicht von der Untersuchung von Nervenzellen (BEISBART et al. [2006]), von Polymerschmelzen in der Festkörperphysik (HÜTTER [2003]), bis hin zur Analyse von Strukturen im Universum (KERSCHER et al. [1997]; SCHMALZING und BUCHERT [1997]; SCHMALZING und DIAFERIO [2000]; SCHMALZING et al. [1999]; KERSCHER et al. [2001][1]; KERSCHER et al. [2001][2]; NAKAGAMI et al. [2004]; HIKAGE et al. [2003]) und des kosmischen Mikrowellenhintergrundes (SCHMALZING und GORSKI [1998]; NOVIKOV, FELDMAN und SHANDARIN [1999]; NOVIKOV, SCHMALZING und MUKHANOV [2000]; SCHMALZING, TAKADA und FUTAMASE [2000]; HIKAGE, KOMATSU und MATSUBARA [2006]; HIKAGE und MATSUBARA [2012]). Gerade auf Gebieten, in welchen die Dichtekontraste gering sind, kommen Minkowskifunktionale zum Einsatz. Als Beispiel hierzu kann das Auffinden filamentartiger Strukturen dienen, wie sie etwa in Arbeiten über die im vorherigen Kapitel beschriebene Zel'dovich-Näherung vorhergesagt (ARNOL'D, SHANDARIN und ZEL'DOVICH [1982]; DOROSHKEVICH et al. [1997]) und in N-Körper-Simulationen bestätigt wurden (MELOTT und SHANDARIN [1990]; JENKINS et al. [1998]).

Das Hauptaugenmerk dieses Teils der vorliegenden Arbeit richtet sich daher auf das Entwickeln und Bereitstellen eines Werkzeuges zur Analyse großräumiger Strukturen im Universum und den damit einhergehenden Vergleich mit gängigen Simulationen. Obwohl sich für eine Weiterentwicklung der Theorie der Minkowskifunktionale zahlreiche interessante Themenbereiche anbieten, etwa die Verallgemeinerung auf vektor- und tensorwertige Minkowskifunktionale (wie in BEISBART und BUCHERT [1998]; BEISBART, VALDARNINI und BUCHERT [2001]; BEISBART et al. [2002]), ist das nicht Ziel dieser Arbeit. So wird im nächsten Abschnitt nach dem Besprechen des Germ-Grain-Modells zügig auf die Berechnung der Funktionale bei gegebenen Datenmengen übergeleitet. Mit einem Programmcode CHIPMINK zur morphologischen Analyse von Punktmengen wird ein entsprechendes Werkzeug eingeführt, die Umsetzung sowie Anwendung erläutert sowie dem Leser auf der gedruckten Version dieser Arbeit beiliegenden CD zur Verfügung gestellt.

3.2 Die Implementierung der Minkowskifunktionale

Die meisten der gängigen Anwendungen, in welchen Strukturen analysiert werden sollen, beruhen auf der beobachteten oder simulierten Verteilung von Punkten, üblicherweise im dreidimensionalen Raum. Derartige Strukturen können mit Hilfe des im Folgenden vorgestellten Programmcodes CHIP-MINK (Code for High-speed Investigation of Partial Minkowski Functionals) untersucht werden. Die dabei umgesetzte, von MECKE, BUCHERT und WAGNER (1994) vorgeschlagene Methode zur Implementierung der Minkowskifunktionale ist schon für kleine Datensätze numerisch stabil, denn sie basiert auf der Additivität der Funktionale. Dadurch lassen sich sowohl lokale als auch globale Informationen über die Morphologie der aus der betrachteten Punktmenge entstehenden Strukturen gewinnen.

3.2.1 Das Germ-Grain-Modell

Die im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Minkowskifunktionale sind für ausgedehnte Körper definiert. Um sie zur Analyse von Punktmengen, wie sie z.B. in Galaxienkatalogen vorliegen, nutzen zu können, muss aus den vorhandenen Punkten eine Struktur gewonnen werden. Die beiden üblichen Methoden hierfür sind die Konstruktion von „*excursion sets*“ wie Isodichtekonturen⁵² und das Verwenden von Germ-Grain-Modellen.

Germ-Grain-Modelle verallgemeinern in natürlicher Weise die klassischen Booleschen Kornmodelle, bei denen den strukturbildenden Samen ein Poisson-Prozess zugrunde liegt, auf eine größerer Klasse von Punktprozessen (HANISCH [1981]; STOYAN, KENDALL und MECKE [1987]; HEINRICH [1992]). Das im Folgenden vorgestellte Germ-Grain-Modell wurde zusammen mit den Minkowskifunktionalen von MECKE, BUCHERT und WAGNER (1994) in die Kosmologie eingeführt, siehe auch BUCHERT (1995) und SCHMALZING, KERSCHER und BUCHERT (1995) für ein Tutorial. In den folgenden Jahren wurde

⁵² Das Untersuchen von geglätteten Isodichtekonturen ist bei der Berechnung von Minkowskifunktionalen eine gebräuchliche Vorgehensweise und wurde zur Analyse von Galaxienkatalogen und Simulationsdaten angewandt von z.B. PLATZÖDER und BUCHERT (1996); SCHMALZING und BUCHERT (1997); SAHNI, SATHYAPRAKASH und SHANDARIN (1998); SATHYAPRAKASH, SAHNI und SHANDARIN (1998); SCHMALZING et al. (1999); HIKAGE et al. (2003); NAKAGAMI et al. (2004); CHOI et al. (2013); BLAKE, JAMES und POOLE (2014). Hierbei wird die Punktverteilung in ein kontinuierliches Dichtefeld „geglättet“ und ein Dichteschwellwert festgelegt. Die Flächen, an denen das Feld diesen Wert aufweist, bilden dann die Oberfläche der zu untersuchenden Struktur.

es vor allem von Martin Kerscher weiterentwickelt und zur Analyse von Galaxienkatalogen eingesetzt (KERSCHER et al. [1997]; KERSCHER et al. [1997]; KERSCHER et al. [1998]; KERSCHER [1999]; KERSCHER et al. [2001][1]; KERSCHER et al. [2001][2]). Bisher wurden Germ-Grain-Modelle hauptsächlich dazu benutzt, verschiedene Datensätze miteinander zu vergleichen. Durch die vollständige morphologische Beschreibung etwa der Galaxienverteilung in einem gegebenen Datensatz gilt: Unterscheiden sich die Minkowskifunktionale zweier Datensätze, stellen diese morphologisch verschiedene Strukturen dar (KERSCHER et al. [1998]). In WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN (2014) werden die Eigenschaften des Germ-Grain-Modells außerdem dazu benutzt, Informationen über die statistischen Eigenschaften der den untersuchten Datensätzen zugrunde liegenden Punktprozesse zu extrahieren, siehe auch Abschnitt 3.4.4.

Betrachtet wird zunächst eine Menge von N Punkten $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ im d -dimensionalen Euklidischen Raum, die z.B. eine Verteilung von Galaxien darstellen kann. Jeder dieser Punkte x_i wird mit einem Korn („*grain*“), hier einer Kugel

$$B_r(\mathbf{x}_i) = \{x \in \mathbb{E}^d \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq r\} \quad (3.12)$$

mit Radius r „verziert“ und bildet so den Samen („*germ*“) für die entstehende Struktur. So entstehen durch Vereinigung der Kugeln komplexe Strukturen

$$A_r = \bigcup_{i=1}^N B_r(\mathbf{x}_i) \quad (3.13)$$

die mit zunehmendem Kugelradius stärker zusammenhängen, siehe Abbildung 3.4.

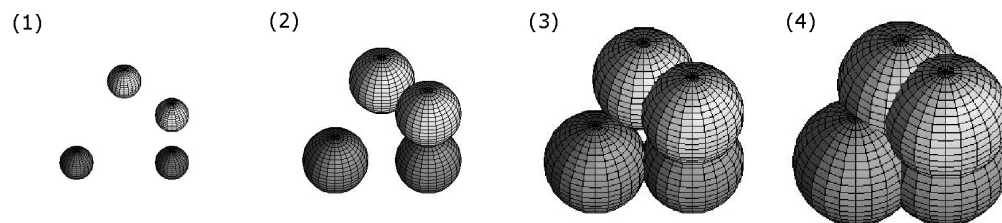


Abbildung 3.4: Germ-Grain-Modell. Für steigenden Radius r der um die Punkte $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ gelegten Kugeln bilden sich komplexe Strukturen A_r .

Diese Strukturen A_r sollen auf ihre geometrischen und topologischen Eigenschaften hin untersucht werden, wobei der Radius r als diagnostischer Parameter dient. Er definiert zu jedem Punkt \mathbf{x}_i eine Nachbarschaft, welche

aus denjenigen Punkten \mathbf{x}_k besteht, deren Kugeln bei gegebenem Radius die Kugel um \mathbf{x}_i schneiden. Die Zahl an Nachbarn variiert umso stärker, je inhomogener die Punkte einer solchen Menge im Raum verteilt sind.⁵³

Da das Hauptaugenmerk der vorliegenden Arbeit in der Analyse beobachteter oder simulierter räumlicher Strukturen wie der Verteilung von Galaxien im Universum liegt, beschränken sich die Überlegungen in den folgenden Abschnitten stets auf den dreidimensionalen Fall. In Tabelle 3.2 können nun die Beziehungen zwischen den eingeführten Funktionalen wiedergegeben werden.⁵⁴

μ		W_μ	V_μ	Φ_μ
0	V	W_0	V_0	$V/(\frac{4\pi}{3}r^3N)$
1	F	$3W_1$	$6V_1$	$F/(4\pi r^2N)$
2	H	$3W_2$	$3\pi V_2$	$H/(4\pi rN)$
3	$G = 4\pi\chi$	$3W_3$	$4\pi V_3$	χ/N

Tabelle 3.2: Zusammenhang der Minkowskifunktionale V_μ mit den Quermaßintegralen W_μ aus dem Satz von Steiner für $d = 3$. Angegeben sind außerdem die reduzierten Minkowskifunktionale Φ_μ .

Zusätzlich zu den V_μ und W_μ wurden in der Tabelle die reduzierten Minkowskifunktionale $\Phi_\mu(\eta)$ verwendet,

$$\Phi_\mu(\eta) = \frac{V_\mu(A_r)}{NV_\mu(B_r)} \quad \text{mit} \quad \eta = \rho \frac{4\pi}{3} r^3 \quad (3.14)$$

Dabei ist N die Anzahl der Datenpunkte, um die Kugeln gelegt werden, ρ ihre Anzahl pro Volumeneinheit und $V_\mu(B_r)$ das entsprechende Minkowskifunktional einer einzelnen dieser Kugeln zum jeweiligen Radius. Insbesondere ist die verwendete Variable η dimensionslos und bezieht die Dichteverteilung mit ein. Das wird im Abschnitt 3.3 angewendet, in welchem die Minkowskifunktionale zu Datensätzen des Galaxienkatalogs 2dFGRS bestimmt werden. Dort liegen Datensätze der nördlichen sowie der südlichen galaktischen Ebene vor, die entsprechend der Beobachtung leicht voneinander abweichende Galaxiendichten aufweisen.⁵⁵

⁵³ Für jeden Radius entsteht auf diese Weise eine Zahl an Clustern, wobei all diejenigen Punkte als zugehörig zu einem Cluster bezeichnet werden, die durch eine Kette sich schneidender Kugeln verbunden sind.

⁵⁴ Die ersten drei Minkowskifunktionale stellen dabei geometrische Größen dar, während die Eulercharakteristik eine topologische Größe ist.

⁵⁵ Natürlich können auch die reduzierten Minkowskifunktionale als Funktion des Kugelradius aufgefasst und entsprechend dargestellt werden, siehe Abbildung 3.15.

Abgesehen vom Volumen sind im Germ-Grain-Modell die globalen Minkowskifunktionale auf der Oberfläche der Struktur lokalisiert und können mit Hilfe der so genannten Zerlegungsformel bestimmt werden (vgl. SCHMALZING [1999]; SCHMALZING und DIAFERIO [2000]),

$$V_m(A_r) = \sum_{i=1}^N V_m^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V_m^{(ij)} + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^N V_m^{(ijk)} \quad (3.15)$$

Hier gilt $m = 1, 2, 3$, $V_m^{(i)}$ bezeichnet den Beitrag der Kugel um \mathbf{x}_i , $V_m^{(ij)}$ und $V_m^{(ijk)}$ sind die Beiträge der Schnitte aus zwei bzw. drei Kugeln wie z.B. die freie Oberfläche der Kugel um \mathbf{x}_i . Mit zunehmendem Radius verringert sich der Prozentsatz an freier Oberfläche. Selbst die Schnittkreise, die beim Schneiden zweier Kugeln entstehen, verschwinden teilweise im Inneren der Struktur, wenn eine dritte Kugel beteiligt ist. Im folgenden Abschnitt werden die sogenannten partiellen Minkowskifunktionale angewendet, um Gestalt und Zusammenhang der Strukturen A_r für verschiedene Radien r zu bestimmen. Die Berechnung des Strukturvolumens V_0 wird im übernächsten Abschnitt beschrieben.

Im Vergleich zur Strukturuntersuchung mittels Isodichtekonturen offenbaren sich einige wesentliche Vorteile des Germ-Grain-Modells:

1. Es lässt sich robust und recht unkompliziert implementieren.
2. Es bietet ein analytisches Verständnis vom Zusammenhang der durchschnittlichen Minkowskifunktionaldichten mit den Korrelationsfunktionen, siehe Abschnitt 3.4.4.
3. Da sich die globalen Minkowskifunktionale aus lokalen Beiträgen zusammensetzen, ist es möglich, aus der ursprünglichen Punktmenge Datensätze mit bestimmten Parametern zu filtern. So lassen sich Eigenschaften einzelner Teile der Struktur gezielt überprüfen (PLATZÖDER und BUCHERT [1996]).

Sowohl die nützlichen Verbindungen zwischen den Minkowskifunktionaldichten und den Korrelationsfunktionen als auch die Anwendung der Minkowskifunktionale bei Bildanalyseverfahren wurden in SCHMALZING (1999) besprochen, ein aktuelleres Beispiel findet sich etwa bei MANTZ, JACOBS und MECKE (2008).

3.2.2 Die partiellen Minkowskifunktionale

Die Berechnung der Minkowskifunktionale im in dieser Arbeit vorgestellten Programmcode basiert auf dem Zerlegungssatz (MECKE, BUCHERT und WAGNER [1994]) in der Form

$$W_m^{\text{par}}(\mathbf{x}_i; r) = W_m^{(i)}(r) - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} W_m^{(ij)}(r) + \frac{1}{3} \sum_{j < k, k \neq i} W_m^{(ijk)}(r) \quad (3.16)$$

Hier beschreiben bei gegebenem Kugelradius r die partiellen Minkowskifunktionale $W_m^{\text{par}}(\mathbf{x}_i; r)$ mit $m = 1, 2, 3$ alle Beiträge einer einzelnen Kugel zu den globalen Funktionalen $W_m(A_r)$.⁵⁶ Diese sind dann

$$W_m(A_r) = \sum_{i=1}^N W_m^{\text{par}}(\mathbf{x}_i; r) \quad (3.17)$$

Der Beitrag der unbedeckten Oberfläche einer Kugel mit Radius r um den Punkt \mathbf{x}_i wird mit $W_m^{(i)}(r)$ bezeichnet, während $W_m^{(ij)}(r)$ den Beitrag des freiliegenden Schnittkreisbogens zweier Kugeln um die Punkte $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ darstellt. $W_m^{(ijk)}(r)$ ist demnach der Beitrag der freiliegenden Schnittpunkte der drei Kugeln um $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k$. Die Faktoren $1/2$ bzw. $1/3$ treten dadurch auf, dass sich jeweils zwei, resp. drei Kugeln die Schnittkreise und -punkte teilen. Gibt es keine Schnitte mit anderen Kugeln, sind die entsprechenden Beiträge Null.

Schnitte mit Kugeln um andere Punkte treten lediglich bis zu einem Mittelpunktsabstand des doppelten Kugelradius auf, weswegen die partiellen Minkowskifunktionale die lokale Morphologie in einer wohldefinierten Nachbarschaft gut wiedergeben. Die Minkowskifunktionale im Code CHIP-MINK werden durch Summieren der partiellen Minkowskifunktionale im Germ-Grain-Modell bestimmt. Dazu werden zunächst zu den einzelnen Punkten des Datensatzes Nachbarlisten erstellt, die jeweils diejenigen Punkte in einem geringeren Abstand als den doppelten maximalen Radius bei Berechnung der Minkowskifunktionale enthalten. Auf diese Weise können auch große Mengen an Daten in vergleichsweise kurzer Zeit bewältigt werden.

Zur Berechnung der drei partiellen Minkowskifunktionale $W_m^{\text{par}}(\mathbf{x}_i; r)$ wird die Struktur A_r in lokale Strukturen $A_{r,i}$ aufgeteilt, die um die einzelnen Punkte des Datensatzes herum durch Schneiden mit benachbarten Kugeln

⁵⁶ Es wird der lateinische Index m verwendet, da der Zerlegungssatz lediglich die Funktionale 1, 2, 3 beschreibt. Die Berechnung des Strukturvolumens W_0 wird zu einem späteren Zeitpunkt besprochen. Zum Zusammenhang der hier verwendeten W_m mit den Minkowskifunktionalen in der Form V_m siehe Tabelle 3.2.

entstehen. Die freiliegende Oberfläche dieser lokalen Strukturen besteht somit aus stückweise aneinandergesetzten Segmenten von Kugeloberflächen mit Krümmungsradius r . An der Schnittfläche zweier Kugeln $B_r(\mathbf{x}_i) \cap B_r(\mathbf{x}_j)$ treffen sich diese Segmente an einem freiliegenden Kreisbogen A_{ij} der Länge ℓ_{ij} . Drei sich schneidende Kugeln $B_r(\mathbf{x}_i) \cap B_r(\mathbf{x}_j) \cap B_r(\mathbf{x}_k)$ haben einen gemeinsamen Knotenpunkt, einen so genannten Vertex. Vertizes von vier oder mehr sich schneidenden Kugeln treten nur selten auf, und haben vernachlässigbares Gewicht.

Für jeden Punkt des Datensatzes ist mit steigendem Radius die um ihn herum liegende Kugel zumindest teilweise von benachbarten Kugeln bedeckt. Die partiellen Minkowskifunktionale für diesen Punkt ergeben sich aus Addition der Funktionale von unbedeckter Oberfläche, Bogenlänge der Schnittflächen und Beiträgen der Vertizes. Dabei ist sicher zu stellen, dass diese Beiträge bei der abschließenden Summation über alle Punkte nicht doppelt gezählt werden.

Wie aus Abbildung 3.5 ersichtlich wird, sind beim Schnitt zweier Kugeln mit Radius r die Schnittkreislänge und der Anteil an unbedeckter Oberfläche (*einer* Kugel) gegeben durch⁵⁷

$$\ell_{ij} = 2\pi\sqrt{r^2 - d_{ij}^2} \quad \text{sowie} \quad A_{ij} = 2\pi r^2 + \pi r d = \pi r(2r + d_{ij}) \quad (3.18)$$

Anhand des rechten Teils der Abbildung 3.5 lässt sich die Lage der Schnittpunkte dreier Kugeln gut verdeutlichen. Da sie von allen Kugelmittelpunkten denselben Abstand besitzen, liegen die beiden Vertizes auf derjenigen Flächennormalen zu der aus den drei Mittelpunkten aufgespannten Fläche, die durch den Umkreismittelpunkt läuft. Der Vertex positiver Flächennormale wird Nordpol genannt, der andere Südpol.⁵⁸

Bei der Betrachtung der unbedeckten Fläche beim Schnitt dreier Kugeln zeigt eine einfache Überlegung, dass zunächst die bedeckten Oberflächen der beiden Schnitte einzeln von der Kugeloberfläche der betrachteten Kugel abziehen sind, dann aber die doppelt abgezogene Fläche wieder addiert werden müssen. Die zuviel abgezogene Fläche ist gerade das Kugelzweieck, dessen beide Ecken die Vertizes des Dreifachschnittes sind.

⁵⁷ Da der Abstand d_{ij} im Intervall $[0; 2r]$ liegt, ist der Anteil an unbedeckter Fläche wie erwartet aus dem Bereich $[2\pi r^2; 4\pi r^2]$, d.h. mindestens die Hälfte der Kugeloberfläche ist unbedeckt.

⁵⁸ Da der Abstand eines Kugelmittelpunktes zum Nordpol gerade r beträgt, lässt sich dessen Höhe über der Ebene leicht durch zweifache Anwendung des Satzes von Pythagoras bestimmen.

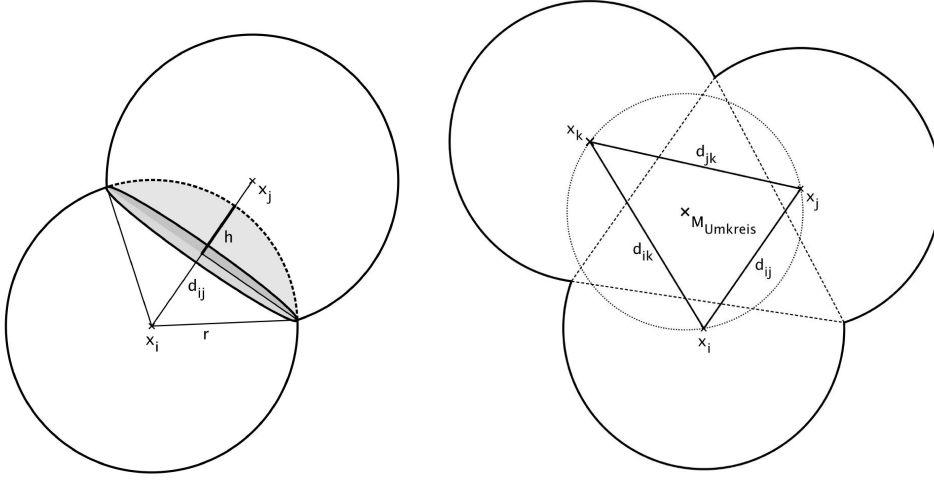


Abbildung 3.5: Schnitt von zwei bzw. drei Kugeln. Links verdeutlicht der Schnitt von zwei Kugeln die entsprechende Berechnung von Schnittkreis und nicht verdeckter Fläche, rechts die Draufsicht auf die Ebene, die beim Schnitt von drei Kugeln durch die Kugelmittelpunkte aufgespannt wird.

Der Anteil an unbedeckter Oberfläche S_i von ∂B_i trägt zu den partiellen Minkowskifunktionalen wie folgt bei (MECKE, BUCHERT und WAGNER [1994]):

$$W_1^{(i)}(r) = \frac{1}{3}S_i, \quad W_2^{(i)}(r) = \frac{1}{3r}S_i, \quad W_3^{(i)}(r) = \frac{1}{3r^2}S_i \quad (3.19)$$

Hierzu kommen die Beiträge der Bogenlängen ℓ_{ij} der Schnitte zweier Kugeln,

$$W_2^{(ij)}(r) = \frac{1}{6}\alpha_{ij}\ell_{ij}, \quad W_3^{(ij)}(r) = \frac{d_{ij}\ell_{ij}}{3r\sqrt{r^2 - (d_{ij}/2)^2}} \quad (3.20)$$

Dabei ist α_{ij} der Winkel zwischen den Normalen von $B_r(\mathbf{x}_i)$ und $B_r(\mathbf{x}_j)$ entlang der Bögen und $d_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| < 2r$ der Abstand benachbarter Punkte. Zu $W_1^{\text{par}}(\mathbf{x}_i; r)$, der Oberfläche, tragen die Bögen nichts bei. Dementsprechend liefert ein unbedeckter Vertex auch nur einen Beitrag zur lokalen Eulercharakteristik $W_3^{\text{par}}(\mathbf{x}_i; r)$. Dieser berechnet sich aus dem Raumwinkel, den die drei Flächennormalen am Vertex aufspannen, nach der Formel von l'Huilier durch (MECKE, BUCHERT und WAGNER [1994])

$$\begin{aligned} \left[\tan \left(\frac{3}{4} W_3^{(ijk)} \right) \right]^2 &= \tan \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{4} \right) \tan \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3}{4} \right) \\ &\times \tan \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3}{4} \right) \tan \left(\frac{-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{4} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

mit den Winkeln

$$\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}{2r}, \quad \sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) = \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|}{2r}, \quad \sin\left(\frac{\alpha_3}{2}\right) = \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|}{2r} \quad (3.22)$$

Die partiellen Minkowskifunktionale sind schließlich

$$W_1^{\text{par}}(\mathbf{x}_i; r) = W_1^{(i)}(r) \quad (3.23a)$$

$$W_2^{\text{par}}(\mathbf{x}_i; r) = W_2^{(i)}(r) - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} W_2^{(ij)}(r) \quad (3.23b)$$

$$W_3^{\text{par}}(\mathbf{x}_i; r) = W_3^{(i)}(r) - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} W_3^{(ij)}(r) + \frac{1}{3} \sum_{j < k, k \neq i} \sum_{k=1}^{N_i} W_3^{(ijk)}(r) \quad (3.23c)$$

Die Summationen erstrecken sich hierbei stets nur über die Anzahl N_i der zu \mathbf{x}_i benachbarten Punkte, d.h. über alle $\{j \in \{1, \dots, N\} \mid \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| < 2r\}$.

Die globalen Minkowskifunktionale und ihre Dichten sind dann

$$W_m(A_r) = \sum_{i=1}^N W_m^{\text{par}}(\mathbf{x}_i; r), \quad w_m = \frac{1}{NV} \sum_{i=1}^N W_m^{\text{par}}(\mathbf{x}_i; r) \quad (3.24)$$

mit der Summation über die Anzahl N an Punkten in der Katalogmaske mit dem Volumen V , bzw. ausgedrückt durch die v_m , vgl. Tabelle 3.2,

$$v_1 = \frac{1}{2}w_1 \quad ; \quad v_2 = \frac{1}{\pi}w_2 \quad ; \quad v_3 = \frac{3}{4\pi}w_3 \quad (3.25)$$

3.2.3 Die Behandlung der Ränder

Die Familie der Minkowskifunktionale erlaubt eine vollständige Behandlung der Maskenränder gemäß der Formel

$$v_\mu(A_r) = \frac{V_\mu(A_r \cap D)}{V_0(D)} - \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \binom{\mu}{\nu} v_\nu(A_r) \frac{V_{\mu-\nu}(D)}{V_0(D)} \quad (3.26)$$

Hier sind V_μ die Minkowskifunktionale und v_μ ihre mittleren Dichten, D bezeichnet die Ränder, d.h. die Geometrie der Katalogmaske (siehe den Review KERSCHER [2000], und die Referenzen darin; für ein Beispiel s. KERSCHER, SCHMALZING und BUCHERT [1996]; für eine Anwendung auf Galaxienkataloge KERSCHER et al. [1997]). Zur Korrektur der Ränder benötigt man nach dieser Formel den vollen Satz an Funktionalen, einzelne Funktionale lassen sich nicht individuell korrigieren.

Um derartige Randkorrekturen oder künstliche Annahmen wie periodische Randbedingungen zu vermeiden, werden bei der Berechnung im Code CHIPMINK nur solche Punkte verwendet, die vom Rand der Maske einen Abstand von mehr als dem doppelten aktuellen Kugelradius haben (s. Abb. 3.6). So ist für jeden gewählten Punkt die Berücksichtigung aller möglichen Schnitte gewährleistet. Dabei geschieht das Einrücken sukzessive mit steigendem Radius, es wird also immer die maximal mögliche Anzahl an Punkten in die Berechnung einbezogen.

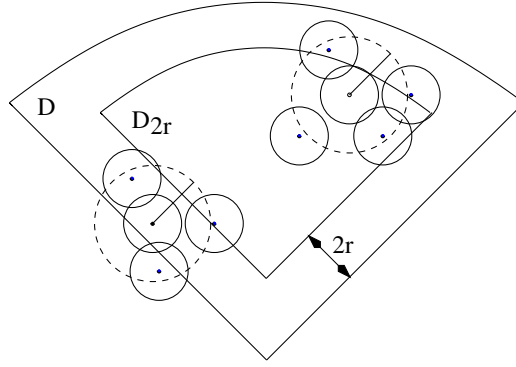


Abbildung 3.6: Zur Berechnung der partiellen Minkowskifunktionale. Vom Maskenrand aus wird um den doppelten Kugelradius eingerückt. So werden Randbedingungen vermieden.

Das Ignorieren eines Teiles der Punkte bei der Berechnung der globalen Minkowskifunktionale hat einen Einfluss auf die Genauigkeit, mit der diese bestimmt werden können, für eine detaillierte Analyse am Beispiel des CfA2-Rotverschiebungskatalogs siehe SCHMALZING und DIAFERIO (2000). Bei der Größe und der breiten Himmelsabdeckung des SDSS, auf den der hier vorgestellte Programmcode zugeschnitten ist, spielt der Effekt keine Rolle.

Die Volumendichten der Minkowskifunktionale werden dann zu

$$v_m = \frac{1}{|D_{2r}|} \sum_{i=1}^N \chi_{D_{2r}}(\mathbf{x}_i) V_m(\mathbf{x}_i, r) \quad (3.27)$$

wobei die charakteristische Funktion $\chi_{D_{2r}}(\mathbf{x}_i)$ prüft, ob sich der betrachtete Punkt im um den doppelten Radius verkleinerten Fenster befindet

$$\chi_{D_{2r}}(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbf{x}_i \in D_{2r} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.28)$$

Nach SCHMALZING und DIAFERIO (2000) stellen die hier angegebenen v_m Minus-Schätzer dar, geben also nur dann Ergebnisse, die frei von systematischen Fehlern sind, wenn sie auf stationäre Punktprozesse angewendet werden (vgl. KERSCHER [1999]). Bei der Berechnung der Minkowskifunktionale für Galaxienkataloge werden daher Volumen-limitierte Datensätze benutzt.

Es ist klar, dass bei dieser Vorgehensweise nicht länger die Minkowskifunktionale der Struktur A_r bestimmt werden, sondern die von $A_r \cap D$, d.h.

$$\frac{1}{N_r} \sum_{j \in J_r} W_m^{\text{par}}(\mathbf{x}_j; r) \neq \frac{1}{N} W_m(A_r) \quad (3.29)$$

wobei $J_r = \{j \in \{1, \dots, N\} \mid d(\mathbf{x}_j, D) \geq 2r\}$ die Teilmenge aller Indizes ist, für die sich der Punkt in in der reduzierten Maske D_{2r} befindet, sowie N_r die Anzahl dieser Punkte.

Allerdings fällt hier eine Begebenheit ins Auge, die diskutiert werden muss. Wie in Abbildung 3.7 verdeutlicht wird, spielt es zunächst durchaus eine Rolle, ob das verkleinerte Maskenfenster als abgeschlossen betrachtet wird.

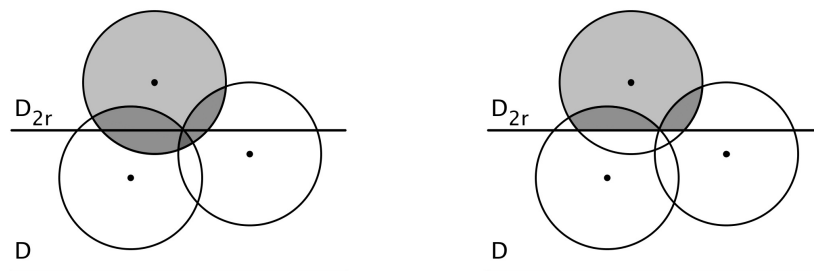


Abbildung 3.7: Zur Behandlung der Ränder. Anhand dieser Abbildung wird deutlich, dass z.B. der freie Volumenanteil für den betrachteten Punkt verschieden ist, je nachdem, ob die Kugel ganz (links) oder nur deren in der verkleinerten Maske befindliche Anteil (rechts) in Betracht gezogen wird.

Eine entsprechende Überlegung ist am einfachsten bei Betrachtung des freien Volumens der Kugel um den gegebenen Punkt. Das gesamte, also auch außerhalb der verkleinerten Maske liegende Schnittvolumen mit anderen Punkten unterscheidet sich von demjenigen, das sich innerhalb der Maske befindet. So stimmen auch die Anteile am gesamten bzw. innerhalb der Maske liegenden Kugelvolumen nicht überein. Analog gilt das natürlich auch für die lokalen Beiträge der partiellen Minkowskifunktionale, wie sie vorigen Abschnitt besprochen wurden.

Für große Masken wie sie in modernen Galaxienkatalogen vorliegen, gilt aber

$$\sum_{j \in J} W_m^{\text{par}}(\mathbf{x}_j; r) \approx W_m(A_r \cap D) \quad (3.30)$$

Durch das Benutzen der Formeln aus Abschnitt 3.2.2 ist in CHIPMINK der in Abb. 3.7 links zu sehende Fall realisiert. Auch außerhalb der verkleinerten Maske liegende Beiträge zu den partiellen Minkowskifunktionalen innerhalb der Maske befindlicher Punkte werden gezählt. Ausführliche Tests haben keinerlei Hinweise auf hierdurch auftretende Fehler geliefert.

3.2.4 Die Berechnung des Strukturvolumens

Da das Volumen einer Struktur nicht auf ihrer Oberfläche lokalisiert ist, kann es nicht auf dieselbe Art berechnet werden wie die übrigen Minkowskifunktionale. Die gängige Methode ist hier eine Monte-Carlo-Integration. Trotzdem wurde hier aus zwei Gründen das im Folgenden vorgestellte alternative Verfahren zur Bestimmung des Strukturvolumens V_0 benutzt: Zum Einen erschien dem Verfasser die verwendete Methode als der einfachste Weg, den Code zur späteren Parallelisierung geeignet zu halten, zum Zweiten ist die Analogie zum Aufsummieren partieller Minkowskifunktionale hier gegeben.

Zunächst werden in die Maske der zu analysierenden Punktmenge in einem Poisson-Prozess eine in der gleichen Größenordnung zur Zahl der beobachteten Galaxien liegende Anzahl zufällig verteilter Punkte $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{N'}\}$ geworfen. Analog zur Berechnung der anderen Funktionale werden beim Bestimmen des Strukturvolumens nur diejenigen Punkte einbezogen, die von der Maske einen Abstand von mindestens dem doppelten Radius r haben, also innerhalb der Maske D_{2r} liegen. Zu diesen werden dann die Nachbarlisten bestehend aus *beobachteten* Punkten erstellt, siehe dazu Abb. 3.8.

In einem weiteren Poisson-Prozess werden M zufällig verteilte Punkte in die Kugeln $B(\mathbf{y}_i, r)$ um die Punkte \mathbf{y}_i geworfen und so jeweils der Bruchteil des von den Nachbarn eingenommenen Volumens zum freien Volumen bestimmt, was einer Monte-Carlo-Integration entspricht,

$$v_0(\mathbf{y}_i, r) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \Delta_{ij} \quad (3.31)$$

wobei Δ_{ij} prüft, ob der geringste Abstand zu einem Element der Nachbarliste

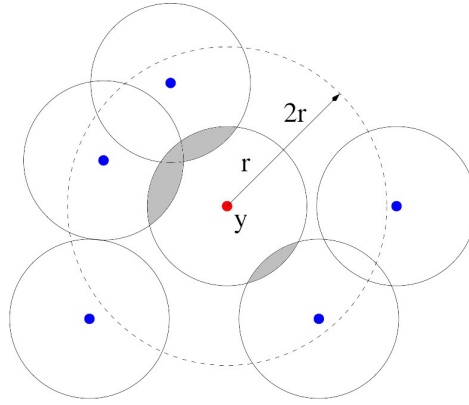


Abbildung 3.8: Zur Volumenberechnung von A_r . Zu einem innerhalb der Katalogmaske zufällig generierten Punkt y (rot) wird die Nachbarliste bestimmt, bestehend aus Punkten des tatsächlichen Datensatzes (blau). Durch eine Monte-Carlo-Integration wird der Volumenanteil der Nachbarn innerhalb der Kugel um den generierten Punkt y bestimmt.

kleiner ist als der gerade betrachtete Radius r ,

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } |d_{min}| \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.32)$$

Nachdem auf diese Art auch für das Strukturvolumen partielle Funktionale – genauer: Funktionaldichten – definiert wurden, werden diese summiert und mit der Anzahl N'_r ausgewählter Punkte normiert.⁵⁹ So ergibt sich das relative Volumen der Struktur zu

$$w_0 = v_0 = \frac{1}{N'_r} \sum_{i=1}^{N'_r} v_0(\mathbf{y}_i, r) \quad (3.33)$$

und bei Multiplikation mit dem Maskenvolumen das globale Strukturvolumen V_0 bzw. W_0 .⁶⁰ Als Konsistenzprüfung wurden bei allen Tests des Codes Monte-Carlo-Integrationen für die Strukturvolumen verwendet und die Ergebnisse verglichen. In keinem Fall traten signifikante Abweichungen auf.

⁵⁹ Der Index r bei der Punktzahl N zeigt an, dass die betrachtete Punktmenge durch das Verkleinern der Maske um das Doppelte des aktuellen Kugelradius definiert ist.

⁶⁰ Nur die letzten beiden Schritte werden von dem Code CHIPMINK ausgeführt. Sowohl das erste Werfen von Zufallspunkten in die Katalogmaske als auch – wie im Fall der anderen Minkowskifunktionale – das Erstellen der Nachbarlisten sind in der Datenaufbereitung durchzuführen. Daher ist es empfehlenswert, im ersten Schritt Zufallspunkte tatsächlich in die gesamte Katalogmaske zu werfen und für sie alle Nachbarlisten zu erstellen, um diese Schritte beim Verwenden anderer Samples oder dem Benutzen verschiedener maximaler Kugelradien nicht zwingend wiederholen zu müssen.

3.2.5 Minkowskifunktionale eines Poisson-Prozesses

Für einen durch einen Poisson-Prozess entstandene Punktverteilung sind analytische Ausdrücke für die Minkowskifunktionale bekannt (s. dazu MECKE und WAGNER [1991]). So kann ein solcher Prozess sowohl als Testlauf für den Programmcode als auch zum Verdeutlichen der entstehenden Graphen dienen. In Abbildung 3.9 sind die analytisch bestimmten Minkowskifunktionaldichten für eine Punktmenge von 24000 zufällig im Einheitswürfel $[0,1]$ verteilten Punkten dargestellt (gestrichelte Linie). Dort werden außerdem die mit Hilfe des Codes berechneten Minkowskifunktionale zu diesen 24000 Punkten geplottet. Wie erwartet zeigt sich eine nahezu perfekte Übereinstimmung der simulierten mit den theoretischen Graphen. Als eine Konsequenz der Additivität der Minkowskifunktionale sind die hier mit angegebenen statistischen Fehler in der Berechnung kleiner als die verwendeten Symbole. Die README-Datei des hierzu geschriebenen Programmcodes sowie ein Listing des Hauptprogrammteils finden sich in Anhang B.1.1 sowie B.1.2.

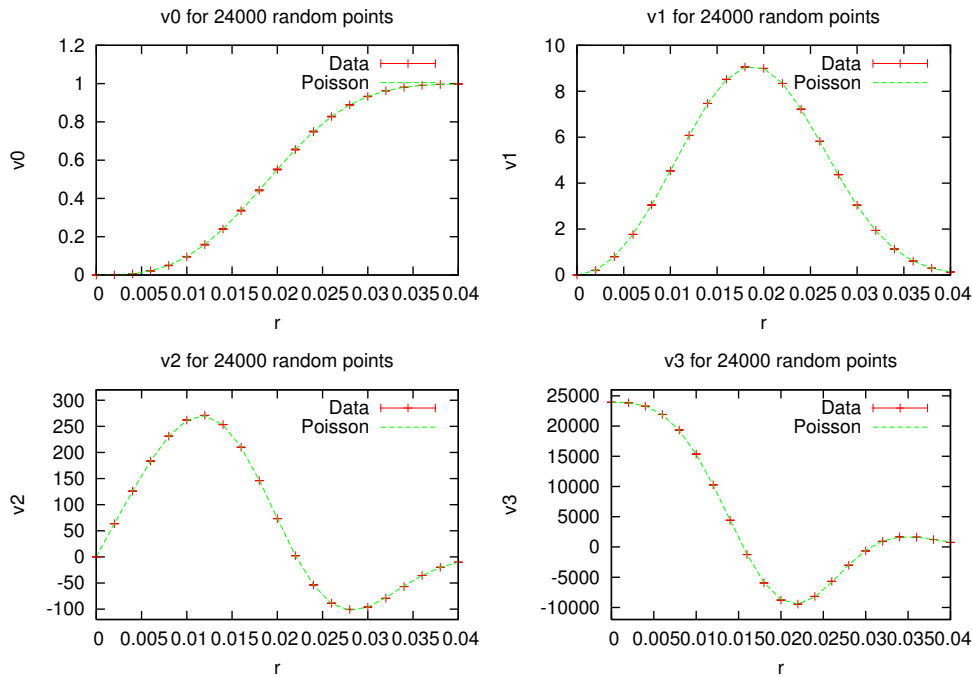


Abbildung 3.9: Aufgetragen sind die Minkowskifunktionaldichten v_0 bis v_3 für einen Datensatz von 24000 zufällig verteilten Punkten. Die gestrichelte Linie stellt die analytisch berechneten Kurvenverläufe dar.

3.3 Der 2 degree Field Galaxy Redshift Survey (2dFGRS)

Nachdem im Juni 2003 der Final Data Release des bis dahin größten Galaxienkatalogs 2dFGRS („2 degree Field Galaxy Redshift Survey“) erschien, lag es nahe, das zur Berechnung der Minkowski-Funktionale geschriebene Programm an diesem zu testen. Der Umgang mit den Daten und Ergebnisse dieser Testläufe werden im Folgenden knapp vorgestellt, das detaillierte Vorgehen sowie einige der bei der Durchführung erstellten Dateien finden sich in Anhang B.2.1.⁶¹

Im Final Data Release des 2dF-Galaxienkatalogs, der bis 2003 vom Anglo-Australischen Observatorium⁶² zusammengestellt wurde, finden sich Daten zu insgesamt 221414 Galaxien, deren Spektren mit einem Güteparameter von $Q \geq 3$ vermessen werden konnten, siehe dazu Abbildung 3.10⁶³ sowie die Übersichtsartikel von Colless und dem 2dFGRS-Team (COLLESS [1999]; COLLESS et al. [2001]; COLLESS et al. [2003]). Zum Messen der Spektren wurde ein 4-Meter-Teleskop verwendet, das durch seine Multifaser-Bauweise bis zu 400 Spektren in einem 2° -Bereich des Himmels gleichzeitig erfassen konnte, siehe dazu vor allem LEWIS et al. (2002) und COLLESS et al. (2001). Beobachtet wurden zwei Streifen, je einer auf der nördlichen und der südlichen Himmelshalbkugel, im Folgenden NGP und SGP genannt bzw. Northern resp. Southern Galactic Plane. Hinzu kamen zufällig verteilte Beobachtungspunkte um den südlichen Streifen herum.

Gleichzeitig mit dem Sammeln von Daten wurden zum Testen verschiedener kosmologischer Modelle Spielzeugkataloge („*mock catalogues*“) simuliert, anhand derer die beobachteten Galaxienverteilungen mit den durch die jeweiligen Modelle vorhergesagten verglichen werden können, siehe dazu COLE et al. (1998).

⁶¹ Da dem 2dF-Katalog im Hinblick auf die Analyse großräumiger Strukturen jedoch inzwischen durch den Katalog des SDSS der Rang abgelaufen wurde, verzichteten wir darauf, ein vom Verfasser dieser Arbeit gemeinsam mit Jens Schmalzing und Claus Beisbart zur Analyse des 2dFGRS geschriebenes Paper „Minkowski Functionals of the 2dF“ zur Veröffentlichung einzureichen. Auch sonst gibt es hier zu nur sehr spärlich Literatur (EINASTO et al. [2007]; SAAR et al. [2007]). Zu den Minkowskifunktionalen des SDSS siehe den nächsten Abschnitt 3.4.

⁶² Heute: „Australian Astronomical Observatory“

⁶³ Bilder des 2dFGRS mit freundlicher Genehmigung der 2dF-Kollaboration, zu finden unter <http://www2.aao.gov.au/2dFGRS/>.

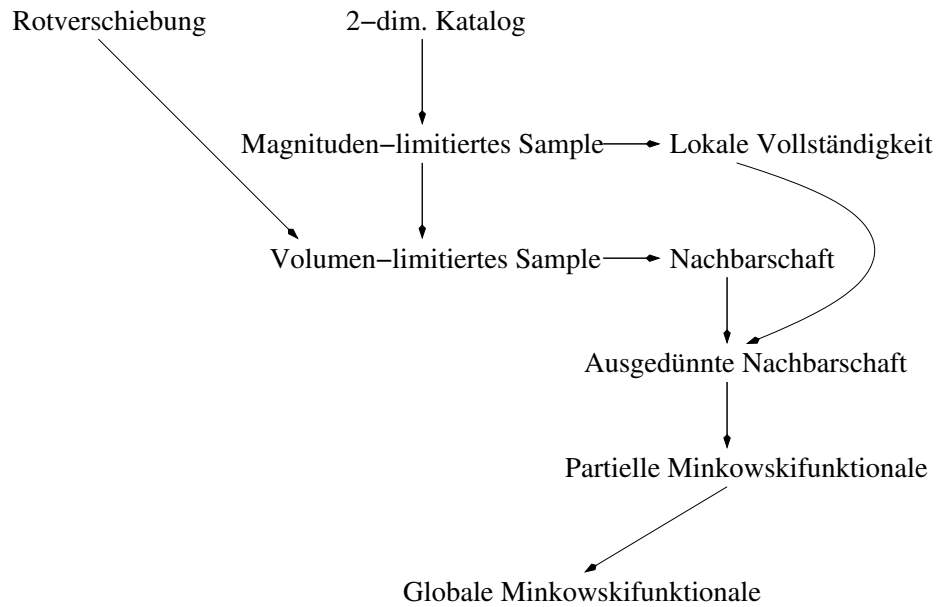


Abbildung 3.11: Diese Graphik zeigt das Vorgehen bei sowohl der Vorbereitung der Daten des 2dFGRS als auch die Berechnung bis hin zu den globalen Minkowskifunktionalen.

zufällig verteilten Beobachtungspunkte des 2dFGRS können ignoriert werden, da sie sich aufgrund ihrer geringen Ausdehnung nicht für eine Analyse durch CHIPMINK eignen. Bei der entstehenden Liste von Positionen am Himmel kann angenommen werden, dass es sich um einen statistisch wohldefinierten, Magnituden-limitierten Datensatz des übergeordneten Katalogs („*Parent Catalogue*“) handelt.

Anschließend werden von diesen rund 170000 Galaxien des Magnituden-limitierten Samples alle Galaxien verworfen, die bei der Messung ihrer Rotverschiebung durch das 2dFGRS-Team einen Güteparameter von $Q < 3$ zugewiesen bekamen. Genauer gesagt gilt in diesem Fall eine Galaxie schon als „gut“, wenn es *mindestens eine* Rotverschiebungsmessung für sie gab, die den Güteparameter $Q \geq 3$ trägt. Damit ist die Datenaufbereitung an dieser Stelle der vorliegenden Arbeit weniger streng als die durch das 2dFGRS-Team zur Verfügung gestellte Software, die hier rigidere Vollständigkeits-Schnitte durchführt. Das wird allerdings im nächsten Schritt ausgeglichen, indem jeder Galaxie eine *lokale Vollständigkeit* λ zugewiesen und der verwendete Datensatz bei der Berechnung entsprechend ausgedünnt wird.

Dazu wird am Himmel ein Kreis mit einem Radius von $1200''$ um die jeweilige Galaxie herum betrachtet. Als lokale Vollständigkeit einer Galaxie wird der Anteil von Nachbargalaxien mit gemessener Rotverschiebung an

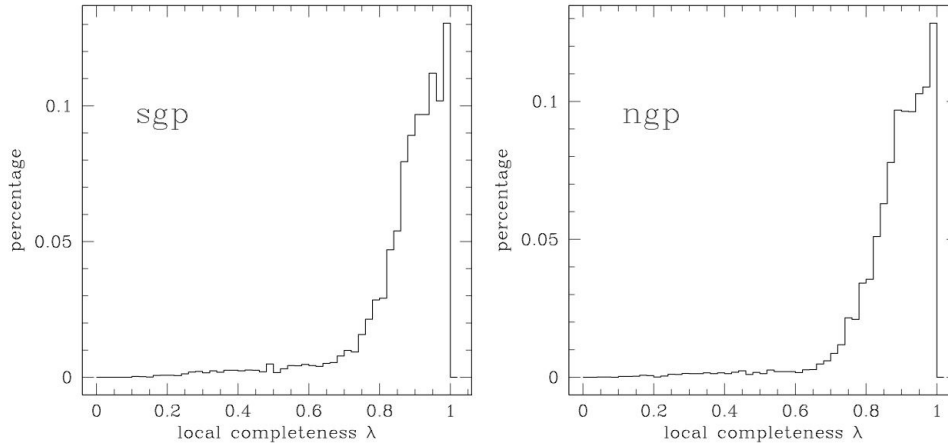


Abbildung 3.12: Verteilung der lokalen Vollständigkeit für die Galaxien des Volumen-limitierten Datensatzes sowohl des SGP als auch des NGP.

den insgesamt in diesem Bereich im Parent Catalogue aufgeführten Galaxien definiert,⁶⁶

$$\lambda = \frac{\# \text{ Gal. mit } z}{\# \text{ Gal.}} \quad (3.34)$$

Dabei wird die ausgewählte Galaxie selbst nicht in die Berechnung mit einbezogen. Der Radius von 1200 Bogensekunden bzw. 20 Bogenminuten wurde so gewählt, da innerhalb dieses Radius jede vermessene Galaxie Nachbarn besitzt und damit die Existenz der lokalen Vollständigkeit gewährleistet ist.⁶⁷ Diese erlaubt es später, die Volumen-limitierten Samples so auszudünnen, dass der Datensatz auf die beobachtete Raumrichtung bezogen homogen ist. In der vorliegenden Arbeit wurden Werte von $\lambda = 0.75 - 0.85$ benutzt.

Abbildung 3.12 gibt die Verteilung der lokalen Vollständigkeit sowohl im NGP als auch im SGP wieder. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die lokale Vollständigkeit der Galaxien im 2dF-Katalog im Allgemeinen sehr hoch liegt, was die Qualität der hierzu durchgeführten Messungen zum Ausdruck bringt.

Durch das Einführen der lokalen Vollständigkeit als neuer Größe ist es wichtig, auf eventuell auftretende Effekte zu achten, die zu Fehlern führen

⁶⁶ An dieser Stelle sei bemerkt, dass es sich bei der lokalen Vollständigkeit um eine Größe handelt, die aus einer Projektion auf die Himmelskugel entsteht. Sie macht also per Definition keine Aussage über räumliche Verteilungen, sondern lediglich über die Güte der Beobachtung in einer bestimmten Raumrichtung.

⁶⁷ Natürlich darf die Bedeutung der lokalen Vollständigkeit nicht überbewertet werden. Da sie aus der Betrachtung teilweise nur weniger Nachbarn gebildet wurde, ist sie jedoch für die mit dieser Arbeit verfolgten Zwecke deutlich besser geeignet als die Feld-Vollständigkeit („*field completeness*“), die das 2dFGRS-Team benutzt, weil sie ausschließlich von der Nachbarschaft der einzelnen Galaxien abhängt.

könnten. Das Hauptproblem ist hier, dass die lokale Vollständigkeit einer Galaxie über deren Position auf der Himmelskugel und den umliegenden Bereich als zweidimensionale Größe definiert ist.⁶⁸ Demgegenüber wird die Nachbarschaft einer Galaxie des Magnituden-limitierten Samples über eine Kugel mit gegebenem Radius im mitbewegten System der Galaxie bestimmt. Andere möglicherweise in die Betrachtung einzubeziehende Effekte beinhalten z.B. die Abhängigkeit der Anzahl an beobachteten Galaxien von der Rotverschiebung. Diesem Effekt ist allerdings durch das Abschneiden der Rotverschiebungen nach unten gut beizukommen. Zudem sind sowohl die Rotverschiebung als auch die Vollständigkeit Funktionen der Magnitude. Während höhere Rotverschiebungen mit größerer scheinbarer Helligkeit korrespondieren, sind hellere Galaxien einfacher zu beobachten, vergrößern also die Vollständigkeit. Prinzipiell können diese Vorbehalte unabhängig von der Berechnung der Minkowskifunktionale untersucht werden. Dazu müsste lediglich die lokale Vollständigkeit ohne und unter Einbeziehen der hier genannten Effekte bestimmt und verglichen werden. Auf diesen Schritt soll jedoch aufgrund der bereits oben erwähnten Sonderstellung des 2dFGRS als (hier) reinem Testkatalog in der vorliegenden Arbeit verzichtet werden.

Im letzten Schritt der Datenaufbereitung werden aus den guten Galaxien Volumen-limitierte Datensätze gebildet. Da die scheinbare Helligkeit m der Galaxien im Magnituden-limitierten Sample sowohl nach oben als auch nach unten begrenzt wurde, muss dasselbe auch für die gemessene Rotverschiebung z getan werden, d.h. $z \in [z_{\min}, z_{\max}]$. Zum Konstruieren der Volumen-limitierten Datensätze wird außerdem jeder Galaxie eine absolute Helligkeit M zugewiesen, die gemäß

$$M = m - 25 - 5 \log(d_L(z)/\text{Mpc}) - (k + e)(z) \quad (3.35)$$

aus der scheinbaren Helligkeit und der Rotverschiebung berechnet wird. In der Formel treten zudem $d_L(z)$, die der Leuchtkraft einer Galaxie zugeordnete Distanz als Funktion der Rotverschiebung, sowie die bekannten Rotverschiebungsabhängigen Korrekturen k und e auf (NORBERG et al. [2002]). Alles in allem bestehen die verwendeten Volumen-limitierten Datensätze nun aus allen guten Galaxien, die sowohl die Bedingung $z_{\min} < z < z_{\max}$ als auch $M_{\min} < M < M_{\max}$ erfüllen, wobei M_{\min} und M_{\max} so gewählt wurden, dass die Galaxien im ursprünglich geforderten Bereich der scheinbaren Helligkeit liegen. Damit ergeben sich schließlich die in Tabelle 3.3 wiedergegebenen 2dFGRS-Datensätze, die außerdem in Abbildung 3.13 graphisch im

⁶⁸ Das entspricht räumlich einem Kegel mit gegebenem Öffnungswinkel.

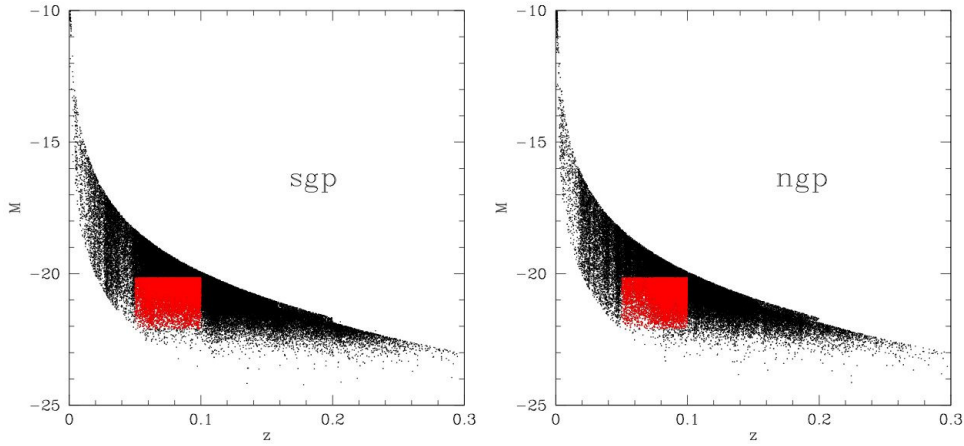


Abbildung 3.13: Die Volumen-limitierten Samples des 2dFGRS.

z - M -Raum dargestellt sind. Ein Volumen-limitiertes Sample aus einem kompletten Rotverschiebungskatalog kann als homogen selektiert angenommen werden und ist daher gut geeignet für die Analyse mit Hilfe von Minkowski-funktionalen.

	SGP	NGP
# der Galaxien	190824	135879
Größtmögliche Magnitude (M)	19.151	18.895
Größe verwendete Magnitude (M)	18.8	18.8
# der Galaxien im Magnitudenbereich	94179	73350
# guter Galaxien	61508	52235
# guter Galaxien mit η -Typ	55948	47321
Rotverschiebungsbereich (z)	[0.05,0.1]	[0.05,0.1]
Magnitudenbereich (M)	[-22.1,-20.15]	[-22.1,-20.15]
# ausgewählter Galaxien	10428	10777

Tabelle 3.3: Statistik der verwendeten 2dFGRS-Datensätze

Es ist anzumerken, dass die soeben wiedergegebenen Überlegungen nicht ohne einige Annahmen durchzuführen sind. So ist insbesondere die Zuweisung absoluter Helligkeiten über die in der Gleichung auftretenden Größen abhängig vom zugrunde gelegten kosmologischen Modell. Bei der hier verwendeten Berechnung von d_L als Funktion von z wurde ein Friedmann-Lemaître-Modell gewählt mit $\Omega_m = 0.35$, $\Omega_\Lambda = 0.65$ und $\Omega_K = 0$ sowie einer Hubblekonstanten von $h_0 = 0.6$.⁶⁹

⁶⁹ Dem Verfasser ist bewusst, dass die verwendeten Werte durch die lange Geschichte

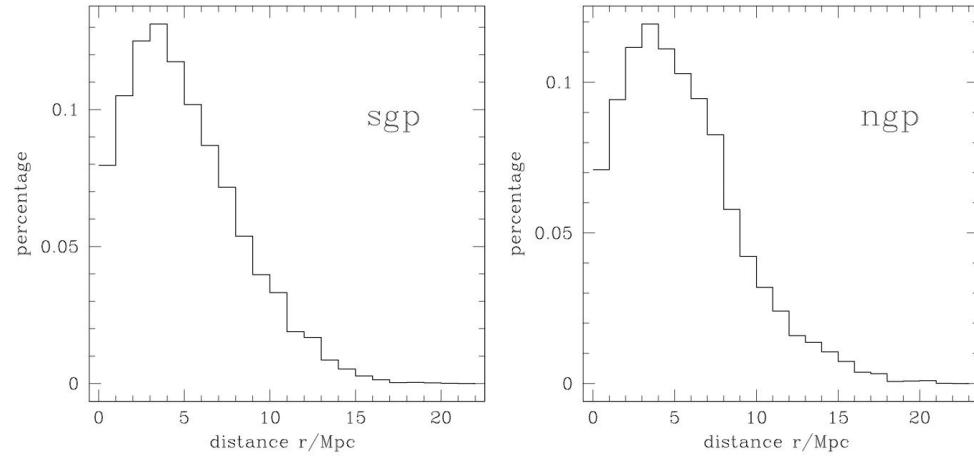


Abbildung 3.14: Distanz der vermessenen Galaxien zum Maskenrand des 2dFGRS.

Zudem werden die vom 2dF-Team vorgeschlagenen $(k + e)$ -Korrekturen verwendet. Diese hängen vom Galaxientyp („ η -Typ“) ab, zu Details siehe MADGWICK et al. (2002). Bezüglich des Galaxientyps wird wie folgt vorgegangen: Liegen zu einer Galaxie mehrere Rotverschiebungsmessungen mit einem Güteparameter von $Q \geq 3$ vor, zu denen jeweils der η -Typ bestimmt werden konnte, wird über diese Werte gemittelt. Jeder der etwa fünf Prozent an guten Galaxien, für die überhaupt keine entsprechende Messung durchgeführt werden konnte, werden die von NORBERG et al. (2002) vorgeschlagenen *mittleren* $(k + e)$ -Korrekturen zugewiesen. Die minimale und die maximale absolute Helligkeit berechnen sich damit zu

$$M_{\min} \geq \max_{\eta} [m_{\min} - 25 - 5 \log(z_{\min}) - (k + e)(z_{\min}, \eta)] \quad (3.36)$$

$$M_{\max} \leq \min_{\eta} [m_{\max} - 25 - 5 \log(z_{\max}) - (k + e)(z_{\max}, \eta)] \quad (3.37)$$

Als die letzten beiden zur Berechnung der Minkowskifunktionale nötigen Eigenschaften werden sowohl die Koordinaten der betrachteten Galaxien als auch ihr Abstand zur Beobachtungsmaske des 2dFGRS bestimmt, siehe Abbildung 3.14. Es wird deutlich, dass die maximalen Kugelradien sinnvollerweise nicht mehr als 3 bis 4 Mpc betragen können, da sonst durch das Reduzieren des Maskenvolumens zu viele Galaxien verloren gehen. Der Grund hierfür ist die doch löchrige Maske des 2dFGRS.

Die partiellen Minkowskifunktionale einer beliebigen Galaxie des Volumen-

der vorliegenden Arbeit veraltet sind und nicht mit den durch genauere Beobachtung verbesserten Abschätzungen konsistent sind, wie sie heute verwendet werden.

limitierten Datensatzes hängen im Germ-Grain-Modell von der Verteilung ihrer Nachbarn innerhalb einer Kugel vom doppelten Kugelradius $2r$ ab. Galaxien mit einer zu geringen lokalen Vollständigkeit werden daher aufgrund zu großer Rechenungenauigkeit verworfen. Zur Berechnung wird für jede der übrigen Galaxien eine Liste der Nachbarn im mitbewegten Koordinatensystem erstellt. Liegt die lokale Vollständigkeit dagegen oberhalb des Schwellwertes λ_{\min} , ist die Anzahl an Nachbarn vor der Berechnung der partiellen Funktionale zufällig auszudünnen.⁷⁰

3.3.2 Die Minkowskifunktionale des 2dFGRS

Das nullte Minkowskifunktional, die Strukturvolumendichte v_0 , wird wie in Abschnitt 3.2.4 besprochen berechnet. Für jeden der geworfenen Poissonpunkte wird die größtmögliche Kugel bestimmt, die noch in die Katalogmaske passt. Alle Galaxien des Volumen-limitierten Datensatzes, die sich innerhalb dieser Kugel befinden, werden in die Nachbarliste des jeweiligen Testpunktes aufgenommen. Zusätzlich wird jedem Testpunkt wie im letzten Abschnitt beschrieben eine lokale Vollständigkeit zugewiesen.

Bei der Interpretation der Minkowskifunktionale ist es oft von Vorteil, diese mittels Division durch das Volumen der Katalogmaske zu normieren. Dieses wird daher mit Hilfe einer Monte-Carlo-Integration bestimmt. Dabei wird zunächst über die Teile der Einheitskugel integriert, die die NGP- bzw. SGP-Regionen beinhalten. Die jeweiligen Werte der Raumwinkelfunktion, welche die verwendete Katalogmaske beschreibt, resultieren mittels einer auf 10^5 Punkten basierenden Monte-Carlo-Simulation in etwa 0.2255 sr für die NGP-Region sowie 0.3338 sr im Falle der SGP-Region.⁷¹ Auf diese Weise berechnet sich das Maskenvolumen unter Verwendung der aus der Rotverschiebung bestimmten minimalen und maximalen Radien, r_{\min} und r_{\max} , zu etwa $3.01 \times 10^7 \text{ Mpc}^3$ für die NGP-Region sowie $4.45 \times 10^7 \text{ Mpc}^3$ für die SGP-Region.⁷²

Die Abbildungen 3.15 zeigen die Minkowski-Funktionale eines Volumen-limitierten Samples des 2dFGRS sgp7 mit lokaler Vollständigkeit von 0.75 bis

⁷⁰ Das mehrfache Durchführen der Berechnungen für das gleiche, aber jeweils anders (zufällig) ausgedünnte Sample zeigt sehr deutlich, dass die Berechnungen hier stabil sind.

⁷¹ An dieser Stelle muss angemerkt werden, dass sich der ermittelte Wert auf die *geplante* Katalogmaske des 2dFGRS bezieht. Tatsächlich wurden einige Bereiche aber gar nicht oder nur unzureichend beobachtet. Gerade um solche Effekte zu kompensieren, wurde die lokale Vollständigkeit eingeführt.

⁷² Hier wird die Einheit Mpc verwendet, nicht wie teilweise üblich Mpc/h_0 . Wann immer benötigt, wird der Wert von h_0 auf 0.6 festgelegt.

0.85. Je größer diese gewählt wird, desto strenger sind die Auswahlkriterien an die Galaxien und desto kleiner ist dementsprechend die Zahl der verwendeten Punkte. Die Radien für das Kornmodell sind hier bis 4 Mpc gewählt, was die Zahl der ausgewählten Galaxien schon auf etwa ein Fünftel einschränkt, nachdem wie beschrieben vom Rand der Maske aus um den doppelten Radius eingerückt wird. Tabelle 3.4 zeigt die Statistik des Volumen-limitierten Datensatzes für die maximalen Radien 3 Mpc und 4 Mpc bei den verwendeten lokalen Vollständigkeits.

	SGP	NGP
# an Galaxien im Volumen-lim. Sample	10428	10777
max. Radius	3 Mpc	3 Mpc
# an Galaxien gewählt für $\lambda = 0.75$	3620	4276
# an Galaxien gewählt für $\lambda = 0.80$	3444	3930
# an Galaxien gewählt für $\lambda = 0.85$	3050	3275
max. Radius	4 Mpc	4 Mpc
# an Galaxien gewählt für $\lambda = 0.75$	2096	2533
# an Galaxien gewählt für $\lambda = 0.80$	1984	2300
# an Galaxien gewählt für $\lambda = 0.85$	1763	1870

Tabelle 3.4: Statistik der verwendeten 2dFGRS-Datensätze

Die oberen vier Diagramme in Abbildung 3.15 stellen die Minkowskifunktionaldichten der SGP-Region dar. Hier sieht man deutlich die Auswirkungen der lokalen Vollständigkeit. Bei gleichem Maskenvolumen weisen die Samples mit zunehmender Vollständigkeit eine geringere Galaxiendichte auf. Der Graph für die Volumendichte v_0 liegt demnach bei diesen Samples auch höher, da sich die Kugeln später schneiden und der Graph demnach länger der r^3 -Abhängigkeit des Kugelvolumens folgt. Die restlichen Graphen lassen sich analog interpretieren.

Die unteren vier Diagramme zeigen die entsprechenden reduzierten Minkowskifunktionale aus (3.14) für sowohl die SGP- als auch die NGP-Region als Funktion des Kugelradius. Hier ist zu erkennen, dass die Graphen, die den NGP-Datensatz darstellen, systematisch unter denjenigen des SGP liegen. Das weist darauf hin, dass sich die Kugeln im NGP bei etwas kleineren Radien zu schneiden beginnen als diejenigen im SGP. Dieser Effekt kann auf eine etwas ausgeprägtere Struktur in der nördlichen Hemisphäre hinweisen. Da die Beobachtungsskalen im 2dFGRS – auch durch die Einschränkung auf ein reduziertes Beobachtungsfenster – nicht sehr groß sind, können lokale Inhomogenitäten wie Strukturen von einigen Mpc Ausdehnung diesen Effekt auslösen.

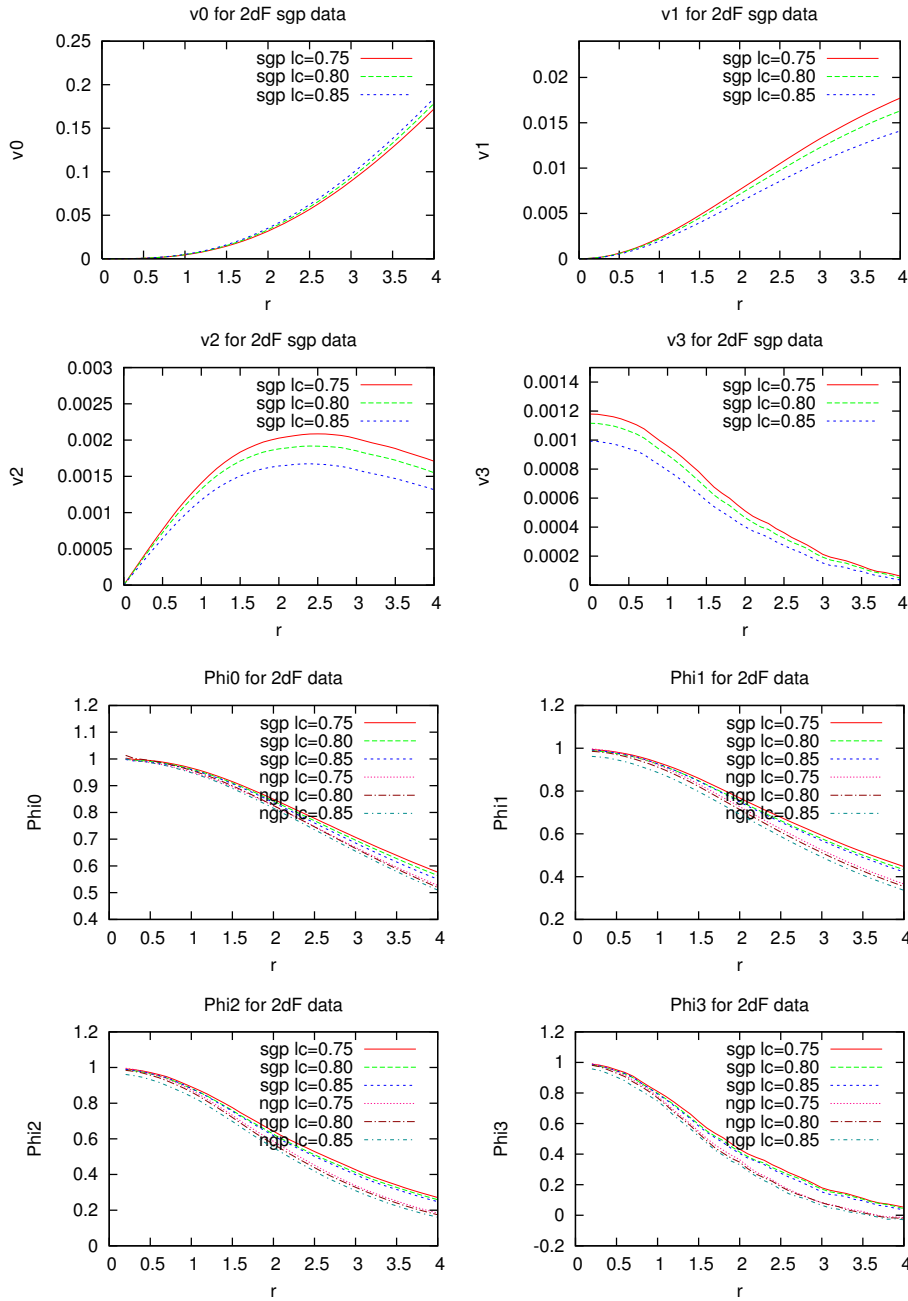


Abbildung 3.15: Obere vier: Die globalen Minkowskifunktionaldichten v_0 bis v_3 für das SGP-Subsample des 2dFGRS mit einem Kugelradius von bis zu 4 Mpc. Untere vier: Die reduzierten Minkowskifunktionale für verschiedene 2dFGRS-Subsamples mit einem Kugelradius von bis zu 4 Mpc als Funktion des Radius r .

3.4 Der Sloan Digital Sky Survey (SDSS)

Der Datenerfassung im Sloan Digital Sky Survey (SDSS) ging bisher in drei Phasen vonstatten. Dabei wurde von 2002 mit Veröffentlichung des Early Data Release (STOUGHTON et al. [2002]) über das First Data Release (ABAZAJIAN et al. [2003]) bis zum Ende der zweiten Phase, SDSS-II, etwa ein Viertel des Himmels abgedeckt und dabei 930000 Galaxien erfasst, siehe Abbildung 3.16.⁷³ Diese zweite Phase wurde Oktober 2008 mit dem Data Release 7 abgeschlossen (ABAZAJIAN et al. [2009]). Inzwischen ist der SDSS-III bei Data Release 10 angelangt, das im April 2014 veröffentlicht wurde (AHN et al. [2014]).

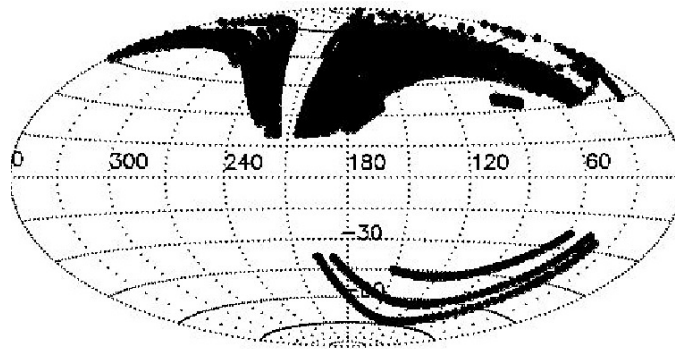


Abbildung 3.16: Spektroskopische Himmelsabdeckung beim SDSS Data Release 4plus. Mit freundlicher Genehmigung der SDSS-Kollaboration.

Im Laufe des letzten Jahrzehnts sind eine Vielzahl an Artikeln erschienen, die mit den durch die SDSS-Kollaboration zur Verfügung gestellten Daten arbeiten, so untersuchten z.B. DOROSHKEVICH et al. (2004) die Galaxienverteilung auf großen Skalen, GOTT et al. (2005) erstellen eine Karte des Universums. Auch Untersuchungen mit Hilfe der Minkowskifunktionale bzw. verwandter Methoden wie dem Genus wurden bereits angestellt, vor allem von Hikage und Mitarbeitern (HIKAGE et al. [2002]; HIKAGE et al. [2003]; HIKAGE, KOMATSU und MATSUBARA [2006]; GOTT et al. [2008]). Zu den technischen Aspekten der SDSS-Datenerfassung wie dem photometrischen System oder dem 2,5-Meter-Teleskop siehe z.B. FUKUGITA et al. (1996); GUNN et al. (1998); YORK und DIE SDSS-KOLLABORATION (2000); sowie GUNN et al. (2006).

⁷³ Abbildung mit freundlicher Genehmigung der SDSS-Kollaboration, zu finden auf dem SDSS-Sky Server <http://www.sdss.org>.

3.4.1 Die Minkowskifunktionale des DR4plus

Hier wird zunächst das 2006 veröffentlichte Data Release 4plus verwendet (ADELMAN-McCARTHY und DIE SDSS-KOLLABORATION [2006]). Alle zur Berechnung vorliegenden Daten wurden von Chiaki Hikage nach Wünschen des Verfassers aufbereitet und zur Verfügung gestellt. Die Berechnung der globalen Minkowskifunktionale geht damit analog zu der des 2dFGRS vonstatten, mit der einzigen Ausnahme, dass aufgrund der Qualität der spektroskopischen Messungen im SDSS auf die Zuweisung einer lokalen Vollständigkeit für jede einzelne Galaxie verzichtet werden kann. Die Abbildungen 3.17 und 3.18 zeigen die verwendeten Volumen-limitierten Datensätze des SDSS.

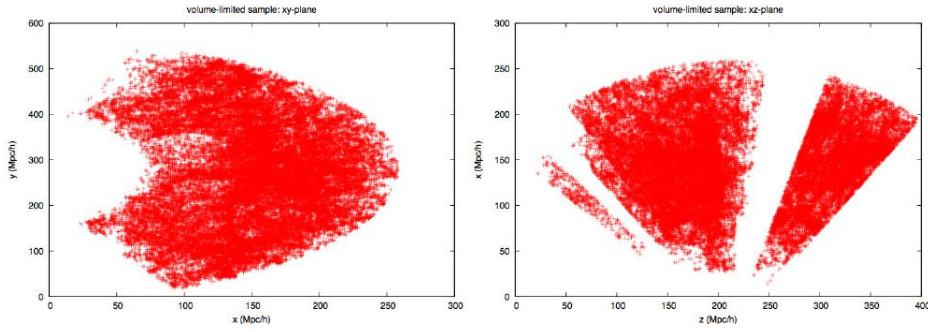


Abbildung 3.17: Projektion des verwendeten Volumen-limitierten Samples aus dem SDSS DR4plus auf die xy -Ebene (links) und die zx -Ebene (rechts).

Die Berechnung der globalen Minkowskifunktionale erfolgt wieder mittels des bereits in Kapitel 3.3 verwendeten Verfahrens. Auch hier wird bei der Aufbereitung der Daten für jede Galaxie der Abstand zum nächsten Loch in der Katalogmaske bestimmt, so dass diese wie beschrieben reduziert werden kann, siehe Abb. 3.18 rechts. Es zeigt sich deutlich, wie sich die Zahl der verwendbaren Galaxien mit zunehmendem maximalen Kugelradius stark verringert. Da die Galaxien zur Bestimmung der Nachbarlisten eine Kugel von höchstens etwa $8 \text{ Mpc}/h$ bis zum nächsten Loch erlauben, sind die Radien für das Germ-Grain-Modell hier auf $2 \text{ Mpc}/h$ bis $4 \text{ Mpc}/h$ festgelegt.

Die Zahl der jeweils im Volumen-limitierten Datensatz verwendeten Galaxien sowie dessen Maskenvolumen in Abhängigkeit des maximalen Kugelradius sind der nachfolgenden Tabelle 3.5 zu entnehmen.

In den zum SDSS DR4plus erstellten Abbildungen 3.19 sind sowohl die globalen als auch die reduzierten Minkowski-Funktionale eines Volumen-limitierten Datensatzes für maximale Radien von $3 \text{ Mpc}/h$ und $4 \text{ Mpc}/h$ dargestellt. Wie anhand der zumeist doch gut aufeinanderliegenden Graphen

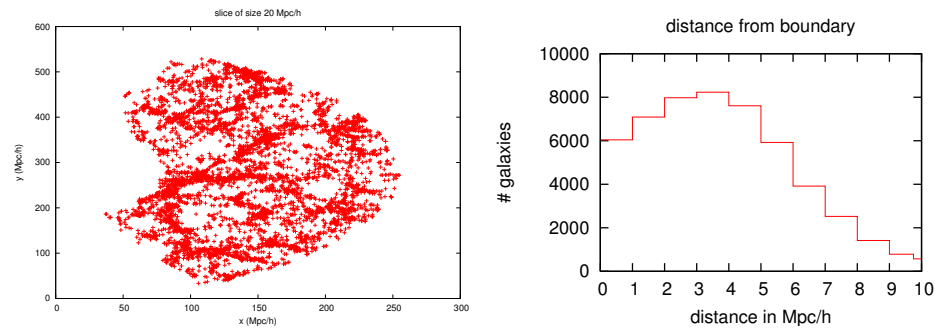


Abbildung 3.18: Links: Schnitt durch das hier verwendete Volumen-limitierte Subsample aus dem SDSS DR4plus. Rechts: Abstand der Galaxien zur Maske des Volumen-limitierten Datensatzes.

zu sehen ist, ist die Berechnung ausgesprochen stabil gegenüber der kleiner werdenden Zahl an Galaxien. Zum Vergleich sind zwei weitere Graphen für die Minkowskifunktionaldichten aufgetragen, wie sie aus Zufallsprozessen entstehen. Neben einem einfachen Poisson-Prozess wurde ein doppelstufiger Prozess gewählt, der bereits Struktur zeigt: in einem ersten Schritt werden zufällig Punkte in die Katalogmaske geworfen und in einem zweiten Schritt dann zufällig Punkte in einen Bereich innerhalb eines bestimmten Radius um diese Punkte, so dass die Gesamtdichte derjenigen des beobachteten Samples entspricht. Weil zwei Poisson-Prozesse geschachtelt werden, wird dieser Prozess hier „*Double Poisson*“ genannt. Wie erwartet sieht man gut, wie die beobachteten Daten eine deutlichere Struktur aufweisen. Ihre Graphen liegen in allen Diagrammen unter denjenigen der beiden Zufallsprozesse, d.h. die Kugeln schneiden sich früher. Zu einem Vergleich mit den Minkowskifunktionalen eines früheren Datensatzes des SDSS siehe HIKAGE et al. (2003), die zur Berechnung allerdings Isodichtekonturen verwenden und daher auch in den Diagrammen eine andere Darstellungsform wählen.

	# Galaxien	Rotverschiebung z	abs. Magnitude M_r
Gesamt	52078	[0.0436142, 0.1]	[-21, -20]
	# Galaxien	Volumen	max. Kugelradius
vsample40	22738	$4.578 \cdot 10^6 (\text{Mpc}/h)^3$	2 Mpc/h
vsample60	9207	$1.864 \cdot 10^6 (\text{Mpc}/h)^3$	3 Mpc/h
vsample80	2768	$0.600 \cdot 10^6 (\text{Mpc}/h)^3$	4 Mpc/h

Tabelle 3.5: Statistik der Volumen-limitierten Subsamples des SDSS.

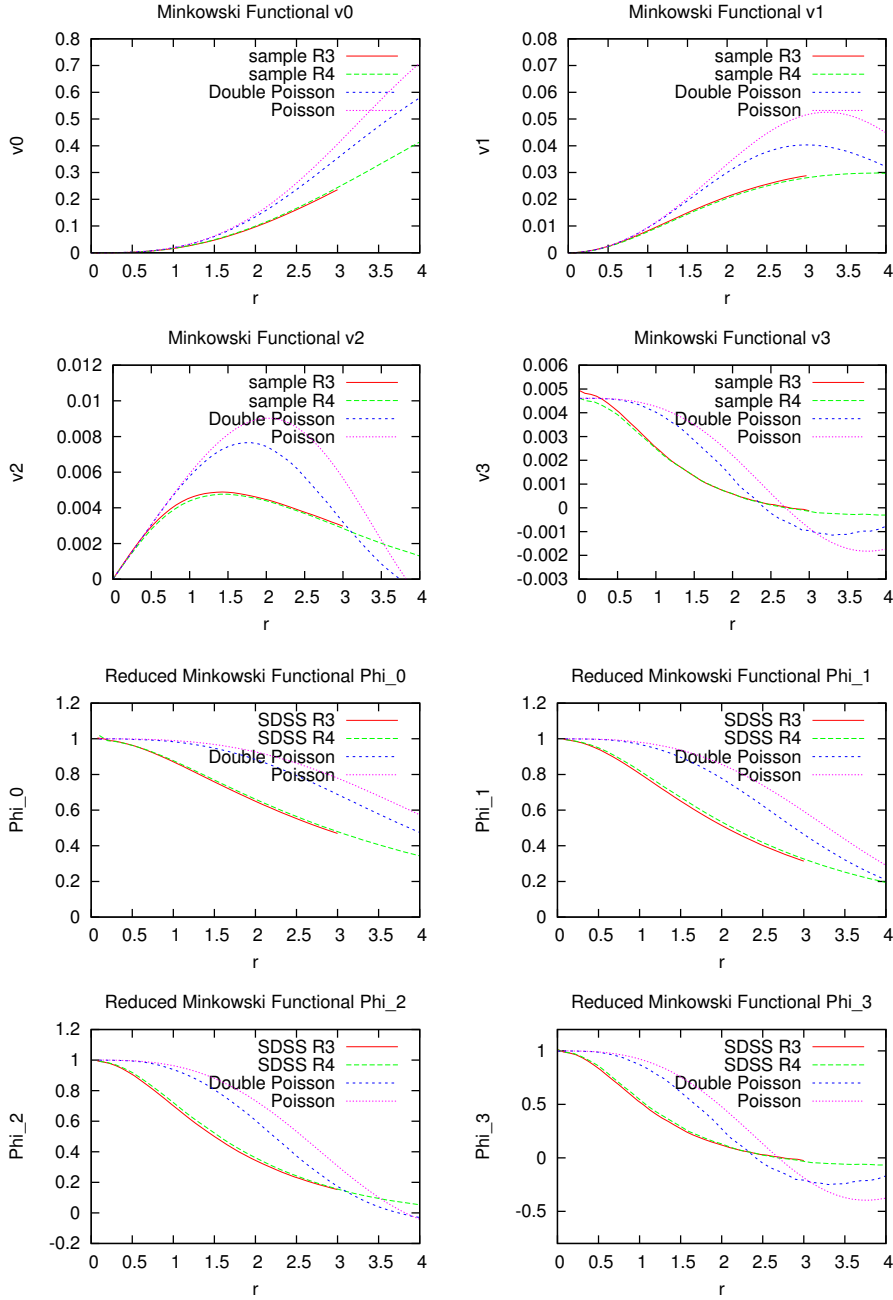


Abbildung 3.19: Zu sehen sind die globalen (oben) sowie die reduzierten (unten) Minkowskifunktionale eines Volumen-limitierten SDSS-DR4plus-Subsamples mit einem Kugelradius von bis zu $4 \text{ Mpc}/h$.

3.4.2 Die Datenaufbereitung zum DR7

In den folgenden Abschnitten werden Minkowskifunktionale sowohl des SDSS-Galaxienkatalogs als auch des LasDamas-Mock-Katalogs berechnet und verglichen. Der verwendete „*Luminous Red Galaxy*“-Datensatz ist ein Teil des Data Release 7 (ABAZAJIAN et al. [2009]; KAZIN et al. [2010]; XU et al. [2013]). Zu diesem Data Release existiert ein Mock-Katalog, der von der LasDamas-Kollaboration aus Λ CDM-Simulationen extrahiert wurde (MCBRIDE et al. [2009]; MCBRIDE et al. [2011]).⁷⁴

Die Datenaufbereitung sowie die Berechnung der Minkowskifunktionale wurden dabei von Alexander Wiegand in Zusammenarbeit mit Thomas Buchert mit dem vom Verfasser zur Verfügung gestellten Code durchgeführt. Die Ergebnisse und Interpretationen sind in WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN (2014) veröffentlicht.

Der verwendete Datensatz LRG wird aus dem SDSS-DR7 extrahiert, indem folgende Kriterien angewendet werden (KAZIN et al. [2010]):

- (i) Die betrachtete Galaxie hat ein SDSS-Spektrum.
- (ii) Sie ist nicht in der Nähe heller Sterne.
- (iii) Sie hat eine Sektorvollständigkeit von mindestens 60%.⁷⁵
- (iv) Die gemessene Rotverschiebung liegt im Intervall $z \in [0.16, 0.47]$.
- (v) Die korrigierte r -Magnitude liegt im Intervall $M \in [-23.1, -21.2]$.

Nach dieser Auswahl beinhaltet der LRG-Datensatz noch 105831 Galaxien. Zur Berechnung der Minkowskifunktionale wird diese Zahl weiter beschränkt auf den zusammenhängenden Bereich des SDSS in der nördlichen Hemisphäre. Als Bereich wird hier eine Rektaszension im Bereich $ra \in [132^\circ, 235^\circ]$ gewählt sowie eine Deklination $dec \in [-1^\circ, 60^\circ]$.

Analog zur Betrachtungsweise im Fall des 2dFGRS werden Volumen-limitierte Samples erstellt. Nachdem der im LRG zur Verfügung gestellte Datensatz in bestimmten Bereichen bereits „quasi-Volumen-limitiert“ ist, d.h. Volumen-limitiert bis zu einer Rotverschiebung von $r = 0.36$ bei einer Magnitude heller als $M_r = -21.2$ bzw. bis $r = 0.44$ bei $M_r = -21.8$ (KAZIN et al. [2010]), werden hier folgende Samples ausgewählt:

⁷⁴ Die Mock-Kataloge, die hier für die Analyse der Minkowskifunktionale verwendet werden, sind frei zugänglich unter <http://lss.phy.vanderbilt.edu/lasdamas>. Dort finden sich außerdem viele weitere Informationen zu den durchgeführten Simulationen.

⁷⁵ Die Sektorvollständigkeit („*sector completeness*“) im Rahmen des SDSS wird analog zu der im vorhergehenden Abschnitt für den 2dFGRS eingeführten lokalen Vollständigkeit definiert, zu Details siehe ZEHAVID et al. (2005) und KAZIN et al. (2010).

- Das *dunkle Sample* („*dim sample*“), das Galaxien mit Magnituden bis $M_r = -21.2$ und Rotverschiebungen im Bereich $z \in [0.16, 0.35]$ in Betracht zieht, beinhaltet 41375 Galaxien.
- Das *helle Sample* („*bright sample*“), das Galaxien mit Magnituden bis $M_r = -21.8$ und Rotverschiebungen im Bereich $z \in [0.16, 0.44]$ in Betracht zieht, beinhaltet 22386 Galaxien.

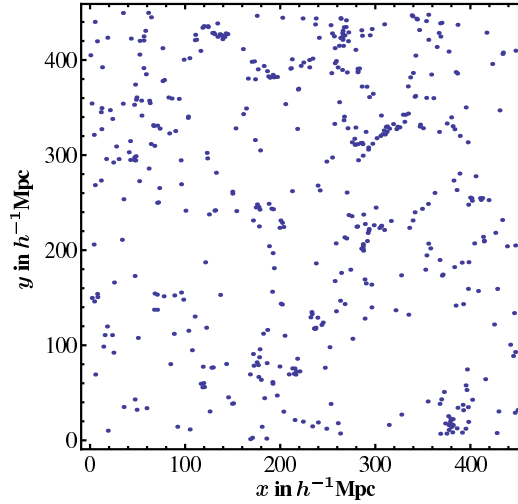


Abbildung 3.20: Hier ist ein Schnitt durch das hier verwendete dunkle Sample aus dem SDSS DR7 zu sehen. Erstellt von Alexander Wiegand für WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN (2014).

Zum Vergleich der beobachteten Strukturen mit Modellen der Strukturbildung werden zudem die Minkowskifunktionale für Mock-Kataloge berechnet, die von der LasDamas-Kollaboration für den SDSS Data Release 7 zur Verfügung gestellt wurden. Den hierfür angestellten Simulationen liegt ein Λ CDM-Modell mit $\Omega_\Lambda = 0.75$ zugrunde, durchgeführt wurden sie für 1280^3 Teilchen in einer Box der Kantenlänge $2.4 h^{-1}$ Gpc. Ausgehend von dieser Simulation wurden von der LasDamas-Kollaboration Mock-Datensätze gebildet, die dem SDSS LRG-Sample entsprechen (zu Details siehe McBRIDE et al. [2009]; McBRIDE et al. [2011]).⁷⁶ Diese werden denselben Auswahlkriterien unterworfen wie beim Bilden der beiden SDSS-Datensätze beschrieben.

⁷⁶ Interessant an diesen Simulationen im Hinblick auf den ersten Teil der vorliegenden Arbeit ist, dass die LasDamas-Simulationen nicht wie bis dahin üblich mit der Zel'dovich-Näherung gestartet wurden, sondern mit Lösungen der Lagrangeschen Störungsrechnung zweiter Ordnung. Auch hieran sieht man die Notwendigkeit der Formulierung einer relativistischen Zel'dovich-Approximation.

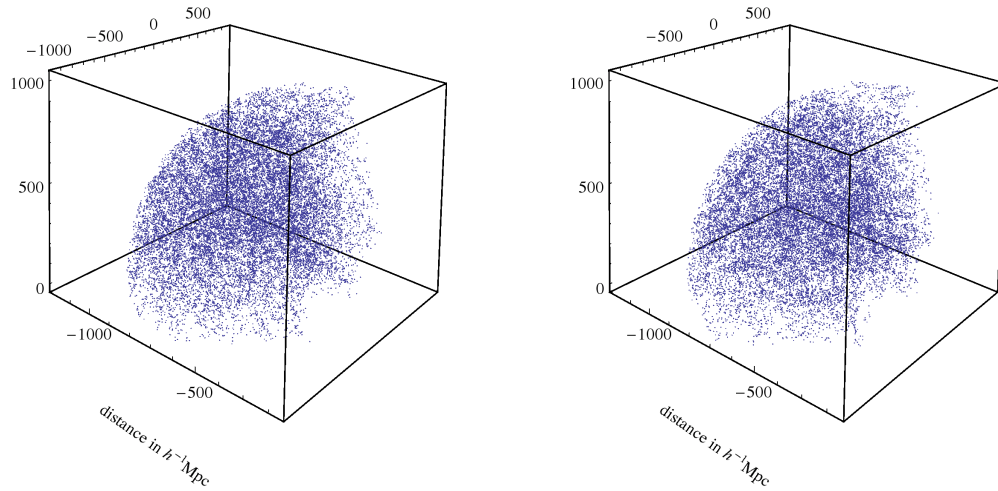


Abbildung 3.21: Zu sehen ist die Galaxienverteilung im hellen Sample in der ausgewählten Maske für den SDSS LRG-Datensatz (links) sowie den LasDamas-Katalog (rechts). Erstellt von Alexander Wiegand für WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN (2014).

So entstehen auch hier sowohl ein dunkles Sample, das 46710 Galaxien beinhaltet, als auch ein helles Sample mit 22181 Galaxien. Abbildung 3.21 zeigt die Verteilung der Galaxien im hellen Sample im Vergleich mit dem entsprechenden Datensatz des LasDamas-Mock-Katalogs. Hierzu wurden mithilfe der Distanz-Rotverschiebungs-Beziehung des Λ CDM-Modells mit $\Omega_\Lambda = 0.75$ alle Rotverschiebungen in mitbewegte Entfernungen umgewandelt.⁷⁷

3.4.3 Die Minkowskifunktionale des DR7

Die Abbildungen 3.22 und 3.23 auf den nächsten Seiten zeigen die Ergebnisse der Berechnungen für die beobachteten sowie simulierten Daten im Vergleich. Da die Minkowskifunktionale abhängig von der Galaxiendichte sind, wurden die beobachteten und simulierten Datensätze auf dieselbe Dichte gebracht. Dazu wurden durch zufällige Auswahl von jeweils 80% der Punkte aus dem dunklen und dem hellen Sample je 244 verschiedene Subsamples kreiert. Diese haben eine Galaxiendichte von $\rho_0 = 7.7 \times 10^{-5} h^3 \text{Mpc}^{-3}$ im Fall des dunklen Samples und $\rho_0 = 2.1 \times 10^{-5} h^3 \text{Mpc}^{-3}$ im Fall des hellen Samples. Aus den 160 verwendeten Mock-Datensätzen wurden durch Auswahl von etwa 80% der Punkte ebenfalls jeweils 244 Subsamples der entsprechenden Dichte ge-

⁷⁷ Die Ausdehnung des dunklen Samples beträgt dabei $507 h^{-1} \text{Mpc}$, die des hellen Samples $730 h^{-1} \text{Mpc}$. Der größte Würfel, den das dunkle Sample beinhalten kann, hat eine Kantenlänge von $452 h^{-1} \text{Mpc}$.

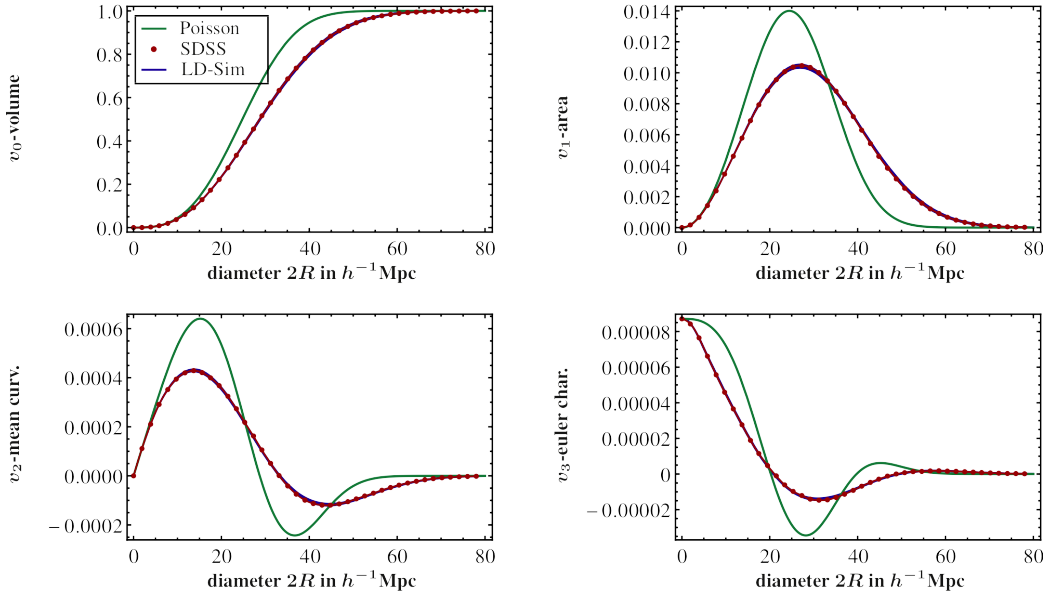


Abbildung 3.22: Die vier Graphen zeigen die für das dunkle Sample berechneten Minkowskifunktionaldichten im Vergleich mit denjenigen der Datensätze des LasDamas-Katalogs. Die Fehler bei den LasDamas-Daten entstehen dadurch, dass über 160 verschiedene Samples gemittelt wird. Erstellt von Alexander Wiegand für WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN (2014).

bildet.⁷⁸

Zur Berechnung der Minkowskifunktionale der beiden SDSS-Datensätze wird dann jeweils der Mittelwert der Funktionale aller 244 Subsamples gebildet. Bei den LasDamas-Katalogen wird zunächst zu jedem einzelnen der 160 Mock-Datensätze der Mittelwert der Ergebnisse der 244 Subsamples gebildet, danach zum Darstellen in den Graphen in einem weiteren Schritt der Mittelwert aus allen 160 Mock-Datensätzen.

Für das dunkle Sample konnte bei Schritten von $\Delta R = 1 h^{-1} \text{Mpc}$ ein maximaler Kugelradius von $R_{\text{max}} = 40 h^{-1} \text{Mpc}$ gewählt werden. Ein größerer Radius bringt keine neuen Erkenntnisse, da die Beobachtungsmaske ab einem Kugelradius von etwa $30 h^{-1} \text{Mpc}$ gesättigt ist, d.h. die entstehende Struktur das ganze zur Verfügung stehende Volumen ausfüllt.

Wie in Abb. 3.22 zu sehen ist, erweisen sich die Minkowskifunktionaldichten als erwartet robust, die 1σ - und 2σ -Fehlerbänder sind kaum zu erkennen. Diese wurden aus der Varianz der in den jeweils 244 Subsamples ermittelten

⁷⁸ Da die Mock-Datensätze leicht unterschiedliche Dichten aufweisen, variiert der Prozentsatz der ausgewählten Punkte hier etwas, so dass eine durchgehend identische Dichte gewährleistet werden kann.

Ergebnisse über alle 160 Mock-Datensätze bestimmt. Die zum Vergleich mit der „*jackknife*“-Methode für das Heruntersamplen auf 80% der Datensätze ermittelten Fehler liegen in derselben Größenordnung. Auch die von Programmcode ausgegebenen und direkt aus den Fluktuationen der partiellen Minkowskifunktionale bestimmten Fehler liegen in dieser Größenordnung.

Um 1σ - und 2σ -Fehlerbänder deutlicher darstellen und die Ergebnisse vergleichbar machen zu können, wird in Abb. 3.23 der Mittelwert der Ergebnisse für die 160 Mock-Kataloge von den Graphen abgezogen. So zeigt sich, dass die Minkowskifunktionale der beobachteten Galaxienverteilung sowohl für das dunkle als auch für das helle Sample signifikant von der simulierten Verteilung abweichen und für v_1 bis v_3 teilweise deutlich außerhalb der Fehlerbänder liegen. Die Mock-Kataloge scheinen die tatsächliche Verteilung der Galaxien hier nicht vollständig wiedergeben zu können. Um bestimmen zu können, wie signifikant diese Abweichungen sind, findet sich eine von Alexander Wiegand durchgeführte detaillierte Analyse mit Hilfe der χ^2 -Werte in WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN (2014). Auffallend ist aber, dass die Abweichungen im Fall des hellen Samples weniger stark ausfallen. Hier handelt es sich um ein deutlich größeres Maskenvolumen bei geringerer Galaxiendichte. So füllt die entstehende Struktur die Maske erst bei deutlich höheren Kugelradien aus, was einen maximalen Radius von $R_{\max} = 60 h^{-1}\text{Mpc}$ erlaubt. Gleichzeitig führt die geringere Anzahl an Galaxien zu geringerer Präzision bei der Berechnung der Funktione und damit zu größeren Fehlern.

3.4.4 Nicht-Gaussische Anteile im DR7

Betrachtet man die Graphen in Abbildung 3.23, ist es nicht ersichtlich, ob die Abweichungen zwischen beobachteter und simulierter Struktur sich bereits in den Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen zeigen, oder ob sie auf Nicht-Gaussische Anteile in der Galaxienverteilung zurückzuführen sind.

Es ist demnach sinnvoll, eine Methode zu nutzen, die es erlaubt, aus den als Funktion der Dichte ermittelten Minkowskifunktionalen die N -Punkt-Korrelationsfunktionen zu extrahieren. Dies wurde von Alexander Wiegand in WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN (2014) detailliert durchgeführt, hier soll lediglich eine kurze Zusammenfassung gegeben werden, um einerseits die erzielten Ergebnisse besser einordnen zu können und andererseits die Vorteile des hier vorgestellten Codes weiter zu verdeutlichen.

Die Minkowskifunktionaldichten eines Punktprozesses hängen wie folgt mit den Korrelationsfunktionen zusammen (SCHMALZING [1999]; SCHMALZING et al. [1999]; eine ausführliche Herleitung findet sich im Anhang von

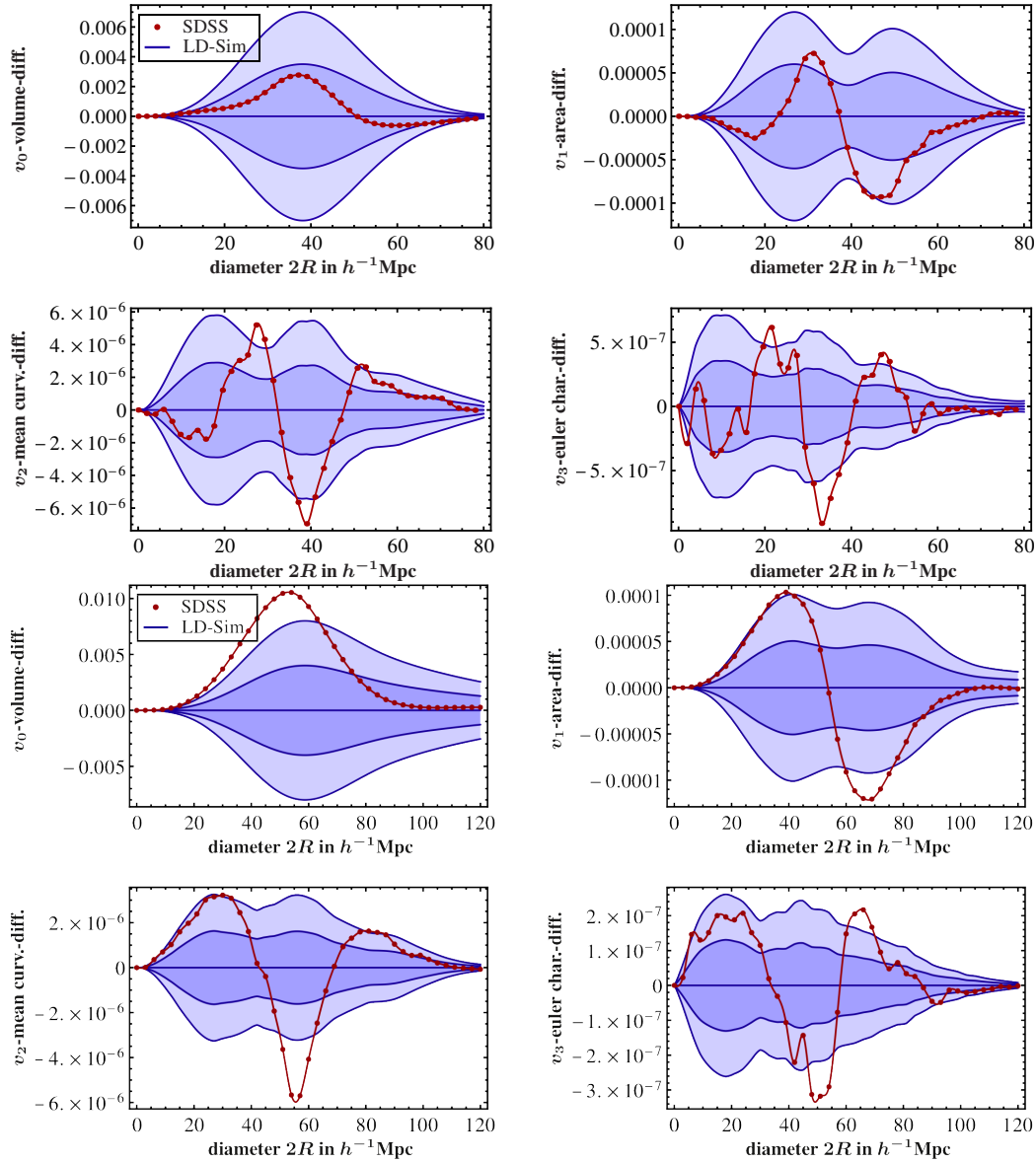


Abbildung 3.23: Dieselben Ergebnisse wie Abb. 3.22, aber dargestellt als Abweichungen der LRG-Minkowskifunktionaldichten von den Ergebnissen der LasDamas-Datensätze, d.h. nach Subtraktion des entsprechenden Durchschnittswertes. So werden die Fehlerbereiche deutlicher. Die dunklen Regionen sind dabei die 2σ -Fehlerbänder, die hellen Regionen 1σ -Fehlerbänder. Obere vier Graphen: Ergebnisse für das dunkle Sample. Untere vier Graphen: Ergebnisse für das helle Sample. Erstellt von Alexander Wiegand für WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN (2014).

WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN [2014]),

$$\begin{aligned}
\langle v_0 \rangle &= 1 - e^{-\rho_0 \bar{V}_0} \\
\langle v_1 \rangle &= \rho_0 \bar{V}_1 e^{-\rho_0 \bar{V}_0} \\
\langle v_2 \rangle &= \left(\rho_0 \bar{V}_2 - \frac{3\pi}{8} \rho_0^2 \bar{V}_1^2 \right) e^{-\rho_0 \bar{V}_0} \\
\langle v_3 \rangle &= \left(\rho_0 \bar{V}_3 - \frac{9}{2} \rho_0^2 \bar{V}_1 \bar{V}_2 + \frac{9\pi}{16} \rho_0^3 \bar{V}_1^3 \right) e^{-\rho_0 \bar{V}_0}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Im Falle eines zugrunde liegenden Poisson-Prozesses sind die \bar{V}_μ die Minkowskifunktionale $V_\mu(B)$ der Kugeln mit Radius r , die wir im Germ-Grain-Modell nutzen, um aus der Punktmenge ausgedehnte Strukturen zu schaffen (MECKE und WAGNER [1991]). Im Fall sonstiger, anders entstandener Verteilungen spiegeln die \bar{V}_μ die Beiträge der Korrelationsfunktionen ξ_{n+1} , $n \in \mathbb{N}$ wider, es gilt nach Invertieren des obigen Gleichungssystems und einer Taylorentwicklung von \bar{V}_μ um ρ_0

$$\bar{V}_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}^\mu}{(n+1)!} (-\rho_0)^n \tag{3.39}$$

mit den Koeffizienten

$$b_{n+1}^\mu = \int_D \xi_{n+1}(0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) V_\mu(B \cap B_{x_1} \cap \dots \cap B_{x_n}) d^3 x_1 \dots d^3 x_n$$

D ist wie gewohnt die Katalogmaske, die Integrale laufen über alle Punkte, d.h. über die Mittelpunkte der Kugeln. Da die $V_\mu(B \cap B_{x_1} \cap \dots \cap B_{x_n})$ keinen Beitrag leisten, wenn die Kugelmittelpunkte einen Abstand von mehr als $2r$ besitzen, verschwinden die entsprechenden Koeffizienten.

Wenn der Verteilung ein Gauss-Poisson-Prozess zugrunde liegt, sind alle Korrelationsfunktionen $\xi_{n+1} = 0$ für $n \geq 3$, und (3.39) vereinfacht sich zu (vgl. MECKE, BUCHERT und WAGNER [1994])

$$\bar{V}_\mu = V_\mu(B) - 2\pi\rho_0 \int_0^{2r} V_\mu(r) \xi_2(r) r^2 dr \tag{3.40}$$

Gerade für die Eulercharakteristik nimmt (3.40) für den Fall eines Gauss-Poisson-Prozesses die einfache Form

$$\bar{V}_3 = 1 - 2\pi\rho_0 \int_0^{2r} \xi_2(r) r^2 dr \tag{3.41}$$

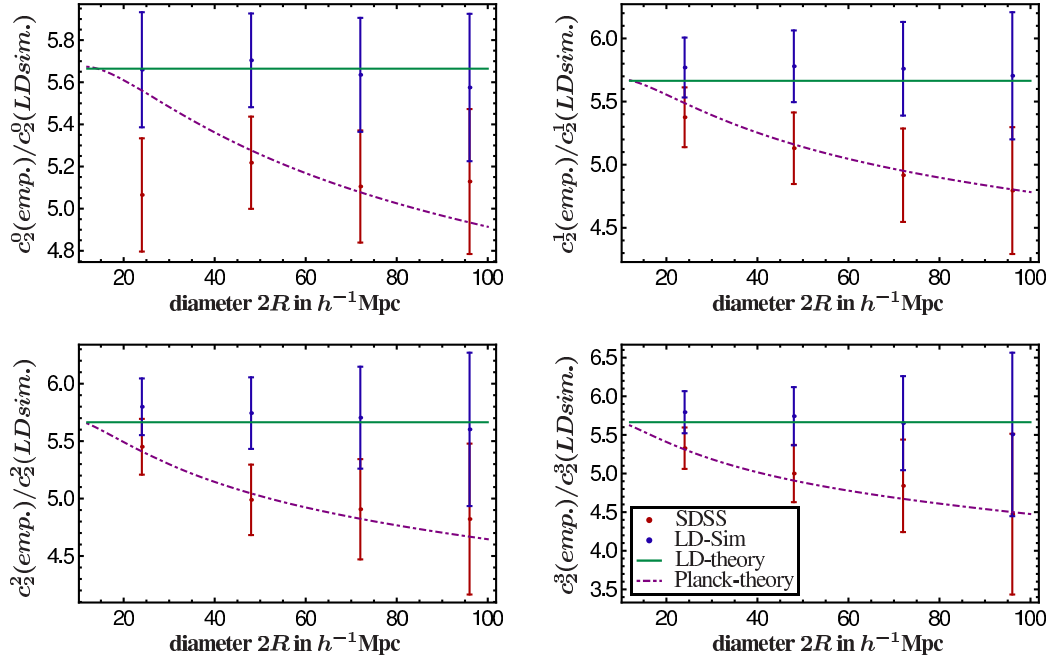


Abbildung 3.24: Relative Abweichung der Integrale der Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen der Beobachtungsdaten des hellen Samples (rot) von denen eines entsprechenden LasDamas Mock-Samples (blau). Dargestellt sind die Koeffizienten $c_2^\mu = b_2^\mu/V_0^2(B)$ mit 1σ -Fehlerbalken. Die gestrichelte Linie entspricht der theoretischen Vorhersage eines *Power Spectrums* mit dem *Planck*-Parameter $\Omega_m = 0.32$. Erstellt von Alexander Wiegand für WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN (2014).

an. Hier sieht man, dass Nicht-Gaussche Anteile in der Verteilung der Punkte sichtbar werden, wenn aus den Minkowskifunktionalen Korrelationsfunktionen von dritter oder höherer Ordnung bestimmt werden können. Dazu muss allerdings die Abhängigkeit der durchschnittlichen Minkowskifunktionaldichten $\langle v_\mu \rangle$ von der Galaxiendichte ρ_0 bekannt sein. Das kann der in dieser Arbeit vorgestellte Programmcode leisten, indem die Minkowskifunktionale zufällig ausgewählter Subsamples mit sukzessive geringer werdender Galaxiendichte berechnet werden. Auf diese Art werden in WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN (2014) die Koeffizienten b_{n+1}^μ für $n \leq 2$ berechnet, siehe Abbildung 3.24, und so Nicht-Gaussche Anteile in der Galaxienverteilung nachgewiesen. Zu weiteren Abbildungen und Details der Berechnungen siehe Abschnitt 5 der zitierten Arbeit.

3.5 Zusammenfassung

Zunächst wurde in Abschnitt 3.1 die Strukturanalyse mit Hilfe der so genannten Minkowskifunktionale grundlegend zusammengefasst. Ausgehend von ihrer Definition anhand des Satzes von Hadwiger wurden die wesentlichen Eigenschaften der Minkowskifunktionale – Additivität, Bewegungsinvarianz und bedingte Stetigkeit – besprochen, bevor mit dem Konzept der Parallelkörper und dem damit verbundenen Satz von Steiner ihre geometrische Interpretation in bis zu drei Dimensionen erarbeitet und in Tabelle 3.1 dargestellt wurde. Dank ihrer einfachen Interpretierbarkeit und dadurch, dass die Minkowskifunktionale eine Struktur morphologisch eindeutig bestimmen, sind sie mächtige Werkzeuge bei der Analyse ausgedehnter Strukturen.

In Abschnitt 3.2 über die Implementierung der Minkowskifunktionale im Programmcode CHIPMINK wurde zunächst das Germ-Grain-Modell als Möglichkeit vorgestellt, aus einem Punktdatensatz, wie er etwa bei der Analyse von Rotverschiebungskatalogen vorliegt, eine ausgedehnte Struktur zu bilden. Hier wird jeder Punkt mit einer Kugel versehen, deren Radius als diagnostischer Parameter bei der Strukturuntersuchung dient. Anschließend wurde die Bestimmung der globalen Minkowskifunktionale über die Summation von partiellen Funktionalen diskutiert, worauf die vom Verfasser dieser Arbeit im Programmcode CHIPMINK umgesetzte Berechnung basiert, siehe dazu auch die Anhänge B.1.1 und B.1.2. Wie sowohl aus dem Hauptteil als auch aus dem Listing im Anhang ersichtlich ist, nimmt das Strukturvolumen bei der Implementierung eine Sonderstellung ein, zur Berechnung siehe Abbildung 3.8. Der Abschnitt wurde abgeschlossen durch die graphische Darstellung der Ergebnisse eines ersten Programmdurchlaufs, siehe Abbildung 3.9. Die Struktur einer vorgegebenen Punktmenge kann nun effektiv quantitativ erfasst werden.

Zunächst wurde der erstellte Programmcode in Abschnitt 3.3 auf die Daten des Rotverschiebungskatalogs 2dFGRS angewendet. Dabei wurde das besondere Augenmerk auf den Weg von der Aufbereitung der Daten bis hin zur letztendlichen Bestimmung der globalen Minkowskifunktionale des verwendeten Samples gelegt, zu Details siehe Abbildung 3.11. Insbesondere musste für die Anwendbarkeit der partiellen Minkowskifunktionale ein Volumen-limitierter Datensatz, d.h. sowohl Rotverschiebungs- als auch Magnituden-limitiert, aus den Rohdaten extrahiert werden. Da nicht alle Himmelsregionen mit gleicher Güte beobachtet werden kann, wurde vor der Berechnung der Funktionalen das bereits Volumen-limitierte Sample gemäß einer speziell zu diesem Zweck eingeführten „lokalen Vollständigkeit“ ausgedünnt, die die

Qualität der Rotverschiebungsmessung widerspiegelt. Tabelle 3.3 zeigt die Statistik der so ausgewählten Galaxien, Abbildung 3.15 gibt die Ergebnisse des Programmdurchlaufs für die angegebenen Datensätze wieder. Deutlich zu erkennen ist eine Diskrepanz zwischen den Minkowskifunktionalen für die Datensätze der nördlichen (NGP) und der südlichen (SGP) galaktischen Ebene. Diese kann ihren Ursprung in der unterschiedlichen Dichte der verwendeten Datensätze oder dem Vorhandensein ausgedehnter Strukturen haben.

Schließlich wurden in Abschnitt 3.4 die Minkowskifunktionale für verschiedene Datensätze des Sloan Digital Sky Survey (SDSS) berechnet. Dabei wurden zunächst die noch vom Verfasser selbst durchgeführten Programmdurchläufe für das *Data Release 4plus* wiedergegeben. Die Statistik der für den Datensatz ausgewählten Galaxien ist in Tabelle 3.5 zu finden, die entsprechenden Ergebnisse ist in Abbildung 3.19 dargestellt. Anschließend wurden die Datenaufbereitung sowie die Ergebnisse der Berechnung für das LRG-Sample (*Luminous Red Galaxy*) des *Data Release 7* besprochen und mit den für den LasDamas-Mock-Katalog bestimmten Minkowskifunktionalen verglichen. Diese wurden von Alexander Wiegand in Zusammenarbeit mit Thomas Buchert mit dem vom Verfasser dieser Arbeit zur Verfügung gestellten Programmcode durchgeführt, ein gemeinsamer Artikel WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN (2014) zu diesem Thema ist erschienen. In den Abbildungen 3.22 und 3.23 wird ein signifikanter Unterschied der Minkowskifunktionale der beobachteten und der simulierten Strukturen deutlich. Hier scheint der LasDamas-Katalog die tatsächliche Galaxienverteilung nicht voll reproduzieren zu können. Eine detaillierte Analyse der Abweichungen findet sich ebenso in WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN (2014) wie die Behandlung der Fragen, ob die beobachteten Abweichungen bereits in den Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen der Datensätze beobachtet werden können und ob Nicht-Gaussische Anteile in der Verteilung der Galaxien gefunden werden können.

Kapitel 4

Diskussion und Ausblick

There are a variety of units for measuring space and time [...]
The phenomenology system presents units of form and time,
and components of words.

*Buddhist Cosmology Teachings*⁷⁹

Wie zu Beginn beschrieben, braucht es zuverlässige und strukturempfindliche Deskriptoren zur Analyse der Galaxienverteilung im Universum. Nur so können sowohl die Güte der Beobachtungen als auch der den Simulationen zugrunde liegenden physikalischen Modelle beurteilt werden.

In den beiden Kapiteln zur Dynamik und Statistik großräumiger Strukturen habe ich einerseits mit den Minkowskifunktionalen solche Deskriptoren in ein Computerprogramm umgesetzt und andererseits mit der relativistischen Zel'dovich-Approximation ein Werkzeug entwickelt, künftige Simulationen realistischer starten zu können.

In Kapitel 2 ist es gelungen, eine relativistische Verallgemeinerung der bekannten Newtonschen Zel'dovich-Approximation sauber zu definieren. Die gängigen kosmologischen Feldgrößen wurden in dieser Näherung sowohl allgemein angegeben als auch auf den speziellen Fall eines Universums mit flachem FLRW-Hintergrund bezogen. Eine ebenfalls bedeutende Rolle in diesem Kapitel fällt dem Weyltensor zu, indem sich die wesentlichen Gleichungen in alternativer Form mit Hilfe seines elektrischen und magnetischen Teils ausdrücken lassen. Durch die Analogie der allgemeinrelativistischen zu den Newtonschen Gleichungen, die auf diese Weise besonders deutlich wird, lassen sich einerseits der Newtonsche Grenzfall exakt integrierbarer Coframes definieren und andererseits Newtonsche Lösungen einfach auf den relativistischen Fall verallgemeinern. Die hier formulierte relativistische Zel'dovich-Approximation kann damit meiner Auffassung nach dazu beitragen, eine Grundlage für allgemeinere nichtlineare – sowohl perturbativ als auch nicht-perturbativ behandelte – Modelle zu bilden, indem sie die bisherigen Studien zur relativistischen Störungstheorie sowie zu exakten Lösungen für Modelle mit hoher Symmetrie ergänzt.

⁷⁹ KONGTRUL (1995), S. 69.

Die dargelegte Näherung bietet nicht nur die Möglichkeit zu Anwendungen in der relativistischen Kosmologie, sondern lässt sich in zukünftigen Arbeiten mit Entwicklungsgleichungen für räumlich gemittelte Größen kombinieren, eine Nachfolgearbeit zu BUCHERT und OSTERMANN (2012) ist mit BUCHERT, NAYET und WIEGAND (2013) bereits erschienen, ein dritter Teil ist im Entstehen. Mit dieser Vorgehensweise ließen sich nichtperturbative Modelle definieren, die in der Lage sind, das Rückreaktionsproblem der relativistischen Kosmologie oder auch das Problem der dunklen Energie zu behandeln. Diese realistischen Modelle öffnen zudem die Tür zum Verständnis von Anwendungen wie den nichtlinearen Anteilen an Gravitationswellenstrahlung.

Mit dem Programmcode CHIPMINK wurde in Kapitel 3 ein Werkzeug entwickelt, getestet und angewendet, das es zukünftigen Anwendern erlaubt, die dreidimensionale räumliche Verteilung von Punkten zu untersuchen und morphologisch zu bestimmen. Wie am hier gewählten Thema der Galaxienkataloge ersichtlich wird, ist das gewählte Verfahren gut dazu geeignet, auch kleine Punktmengen zuverlässig zu analysieren. Im Vergleich der Minkowskifunktionale zum *Data Release 7* des *Sloan Digital Sky Survey* mit denjenigen der LasDamas Mock-Kataloge wird zudem deutlich, dass die betrachtete Simulation die beobachtete Galaxienverteilung im Universum basierend auf dem verwendeten Modell nicht voll wiedergeben kann. Die Abweichungen sind signifikant, die Funktionale des SDSS LRG 7 liegen zum Teil außerhalb der 3σ -Fehlerbänder der simulierten Daten. Eine detaillierte Analyse hierzu findet sich ebenso in WIEGAND, BUCHERT und OSTERMANN (2014) wie die Behandlung der Frage nach Nicht-Gaussischen Anteilen im Entstehungsprozess der Galaxienverteilung. Die LasDamas-Simulationen wurden dabei nicht wie vorher üblich mit der (Newtonschen) Zel'dovich-Näherung gestartet, sondern bereits mit einer Lösung der Lagrangeschen Störungsrechnung zweiter Ordnung. Eventuell ist gerade hier ein vielversprechendes Anwendungsgebiet für die im ersten Teil vorgestellte relativistische Zel'dovich-Approximation zu finden.

Zudem ist eine Anpassung des Programmcodes auf zweidimensionale Verteilungen einfach durchzuführen, so dass sich das Anwendungsfeld noch weiter auf z.B. die ganz aktuell vom ESA-Satelliten PLANCK erstellte neue Karte der Temperaturschwankungen in der kosmischen Hintergrundstrahlung.⁸⁰

⁸⁰ Allein im März 2013 sind über 30 Fachartikel der PLANCK-Kollaboration zu den aktuellen Beobachtungen veröffentlicht worden, siehe dazu ADE et al. (2013) sowie www.sciops.esa.int/index.php?project=PLANCK&page=Planck_Published_Papers.

Anhang A

Anhang: Differentialformen

Im Hauptteil wird sowohl bei der Einführung der Coframes in Abschnitt 2.3 als auch bei der Angabe der Cartanschen Strukturgleichungen in Abschnitt 2.6 auf die spezielle Form (2.75) der Metrik hingewiesen, i.e. ${}^{(3)}\mathbf{g} = \delta_{ab}\boldsymbol{\eta}^a \otimes \boldsymbol{\eta}^b$. Diese Wahl bedingt, dass die gesamte Information über die Hintergrundmetrik im Anfangs-Coframe liegt, $\eta_i^a(t_0) = \dot{\eta}_i^a$.

Nun ist es auch möglich, das Anfangs-Coframe mit $G\eta_i^a(t_0) = \delta_i^a$ einfach zu halten, indem die alternative Form der Metrik ${}^{(3)}\mathbf{g} = G_{ab}\boldsymbol{\eta}^a \otimes \boldsymbol{\eta}^b$ verwendet wird. Diese Wahl hat insbesondere eine Auswirkung auf die Nullte Strukturgleichung, die dann eine zu der im Hauptteil gegebenen Cartangleichung alternative Form annimmt. Die Nullte Strukturgleichung definiert – wie in den folgenden Abschnitten detailliert erörtert – die kovariante Ableitung im betrachteten metrischen Raum. So ist es nach Auffassung des Verfassers wichtig, diese Wahl der Metrik genauer zu betrachten und die Form der kovarianten Ableitung sowie die Zusammenhänge mit den tensoriellen Feldgrößen zu diskutieren.

A.1 Einführung

Dieser erste Abschnitt gibt eine knappe Einführung zu Differentialformen, die sich an die Darstellung in den beiden Büchern STRAUMANN (1984) und NAKAHARA (1990) anlehnt.

Eine *Differentialform* Φ vom Grad r , kurz r -Form, ist ein total antisymmetrischer Tensor vom Typ $(0, r)$.

Dabei ist Φ die übliche, koordinatenfreie Darstellung. Eine koordinatenabhängige Darstellung der Komponenten von Φ in der Basis $\{\mathbf{d}x^i\}$ kann angegeben werden, indem das *äußere Produkt* von r Basis-Einsformen $\mathbf{d}x^i$ als ihr total antisymmetrisches Tensorprodukt

$$\mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_r} = \sum_{P \in S_r} \text{sgn}(P) \mathbf{d}x^{i_{P(1)}} \otimes \mathbf{d}x^{i_{P(2)}} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}x^{i_{P(r)}} \quad (\text{A.1})$$

definiert wird. Dabei erstreckt sich die Summe über alle Permutationen P

der Indizes, und es gilt

$$\text{sgn}(P) = \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutationen } (i_1 i_2 \dots i_r) \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen } (i_1 i_2 \dots i_r) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

So ist z.B.

$$\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j = \mathbf{d}x^i \otimes \mathbf{d}x^j - \mathbf{d}x^j \otimes \mathbf{d}x^i \quad (\text{A.3})$$

Aus obiger Definition des äußeren Produkts folgt sofort, dass bei je zwei gleichen Indizes $\mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_r} = 0$ gilt. Außerdem ist

$$\mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_r} = \text{sgn}(P) \mathbf{d}x^{i_{P(1)}} \wedge \mathbf{d}x^{i_{P(2)}} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_{P(r)}} \quad (\text{A.4})$$

Nun können Differentialformen koordinatenabhängig durch ihre Komponenten dargestellt werden, indem sie in einer Basis $\{\mathbf{d}x^i\}$ entwickelt sind. Es gilt für eine r-Form

$$\Phi = \Phi_{i_1 i_2 \dots i_r} \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_r} \quad (\text{A.5})$$

Durch das äußere Produkt der Basisformen ist natürlich auch $\Phi_{i_1 i_2 \dots i_r}$ total antisymmetrisch zu verstehen. Wenn z.B. ein Tensor T_{ij} in seinen symmetrischen Teil S_{ij} und seinen antisymmetrischen Teil A_{ij} gespaltet ist,

$$S_{ij} = T_{(ij)} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) \quad \text{sowie} \quad A_{ij} = T_{[ij]} = \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) \quad (\text{A.6})$$

dann gilt für die beiden Teile

$$S_{ij} \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j = 0 \quad \text{und} \quad A_{ij} \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j = T_{ij} \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \quad (\text{A.7})$$

Für den antisymmetrischen Teil eines Tensors T_{ij} und für dessen Spurteil gelten die Äquivalenzen

$$T_{[ij]} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad T_{ij} \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$T^i_i = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \epsilon_{ijk} T^i_l \mathbf{d}x^l \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^k = 0 \quad (\text{A.9})$$

Die erste Gleichung folgt direkt aus (A.7)

$$\mathbf{T} \equiv T_{[ij]} \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j = T_{ij} \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j$$

da die $\{\mathbf{d}x^i\}$ eine Basis bilden. Dann müssen die Komponenten von \mathbf{T} ver-

schwinden, damit $\mathbf{T} = 0$ gilt. Zum Beweisen der zweiten Gleichung wird

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}T^i_l \mathbf{d}x^l \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^k &= \epsilon_{ijk}\epsilon^{jkl}T^i_l \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 \\ &= 2T^k_k \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3\end{aligned}$$

berechnet. Von (A.8) und (A.9) wird im Hauptteil einige Male Gebrauch gemacht. Die Definition des äußeren Produkts kann nun auf allgemeine Differentialformen erweitert werden.

Seien $\Phi = \Phi_{i_1 i_2 \dots i_r} \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_r}$ und $\Psi = \Psi_{j_1 j_2 \dots j_q} \mathbf{d}x^{j_1} \wedge \mathbf{d}x^{j_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{j_q}$ Differentialformen vom Grad r bzw. q . Dann ist ihr *äußeres Produkt* eine $(r + q)$ -Form mit

$$\Phi \wedge \Psi = \Phi_{i_1 i_2 \dots i_r} \Psi_{j_1 j_2 \dots j_q} \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_r} \wedge \mathbf{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{j_q} \quad (\text{A.10})$$

Aus dieser Definition folgt sofort eine weitere sehr gebräuchliche Relation, es ist nämlich mit den Bezeichnungen wie in der Definition

$$\Phi \wedge \Psi = (-1)^{rq} \Psi \wedge \Phi \quad (\text{A.11})$$

Nachdem das äußere Produkt zweier Formen eingeführt ist, kann eine weitere Operation für Differentialformen definiert werden, nämlich deren äußere Ableitung.

Sei $\Phi = \Phi_{i_1 i_2 \dots i_r} \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_r}$ eine Differentialform vom Grad r . Dann ist ihre *äußere Ableitung* $\mathbf{d}\Phi$ eine $(r + 1)$ -Form mit den Komponenten

$$\mathbf{d}\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Phi_{i_1 i_2 \dots i_r} \right) \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_r} \quad (\text{A.12})$$

Aus dieser Definition kann wegen der Symmetrie der partiellen Ableitungen $\partial_j \partial_k = \partial_k \partial_j$ sofort abgelesen werden, dass

$$\mathbf{d}\mathbf{d}\Phi = 0 \quad (\text{A.13})$$

Eine weitere wichtige Relation, die aus der Definition der äußeren Ableitung folgt, ist die Produktregel

$$\mathbf{d}(\Phi \wedge \Psi) = \mathbf{d}\Phi \wedge \Psi + (-1)^r \Phi \wedge \mathbf{d}\Psi \quad (\text{A.14})$$

Dabei ist wie üblich r der Grad von Φ . Das ist leicht zu beweisen, indem die äußere Ableitung von (A.10) gebildet und die Produktregel der partiellen

Ableitung für die Komponenten angewandt wird, d.h.

$$\partial_k (\Phi_{i_1 i_2 \dots i_r} \Psi_{j_1 j_2 \dots j_q}) = (\partial_k \Phi_{i_1 i_2 \dots i_r}) \Psi_{j_1 j_2 \dots j_q} + \Phi_{i_1 i_2 \dots i_r} \partial_k \Psi_{j_1 j_2 \dots j_q}$$

Durch die Permutation im zweiten Term

$$\mathbf{d}x^k \wedge \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_r} \wedge \mathbf{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{j_q} = (-1)^r \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_r} \wedge \mathbf{d}x^k \wedge \mathbf{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{j_q}$$

gilt dann nach Einsetzen der Definition für die äußere Ableitung (A.14).

Abschließend soll der Dualitätsoperator eingeführt werden. Dazu wird der Levi-Civita-Tensor benötigt. Dieser *total antisymmetrische Tensor* $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ auf einer Mannigfaltigkeit der Dimension n ist definiert als

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutationen } (i_1 i_2 \dots i_n) \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen } (i_1 i_2 \dots i_n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Es gilt

$$\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{1}{g} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (\text{A.16})$$

wobei $g = \det(g_{ij})$ die Determinante der Metrik auf der Mannigfaltigkeit ist.

Sei $\Phi = \Phi_{i_1 i_2 \dots i_r} \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_r}$ eine r -Form, n die Dimension der betrachteten Mannigfaltigkeit und $g = \det(g_{ij})$ die Determinante ihrer Metrik. Dann ist der *Dualitätsoperator*, oder Hodgesche Sternoperator, definiert als

$$* \Phi = \frac{\sqrt{|g|}}{(n-r)!} \Phi_{i_1 i_2 \dots i_r} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i_{r+1} i_{r+2} \dots i_n} \mathbf{d}x^{i_{r+1}} \wedge \mathbf{d}x^{i_{r+2}} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_n} \quad (\text{A.17})$$

Insbesondere ist $*1$ das invariante Volumenelement wegen

$$\begin{aligned} *1 &= \frac{\sqrt{|g|}}{n!} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \mathbf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_n} \\ &= \sqrt{|g|} \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^n \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Mit den Bezeichnungen aus der Definition gilt außerdem

$$* * \Phi = (-1)^{r(n-r)} \Phi \quad (\text{A.19})$$

für Riemannsche Räume. Alles bisher in diesem Anhang Gesagte bezog sich auf die Komponentendarstellung der Differentialformen in der Koordinatenbasis $\{\mathbf{d}x^i\}$. Ebenso gut können die Differentialformen aber auch in einer

Nicht-Koordinatenbasis von Basis-Einsformen $\{\eta^a\}$ entwickelt werden. Dann gilt

$$\Phi = \Phi_{a_1 a_2 \dots a_r} \eta^{a_1} \wedge \eta^{a_2} \wedge \dots \wedge \eta^{a_r} \quad (\text{A.20})$$

Alle Formeln und Definitionen des Anhangs bleiben auch für diesen Fall gültig. Damit sind die für das Verständnis des Hauptteils der vorliegenden Arbeit wichtigsten Eigenschaften von Differentialformen angegeben. Eine gute Übersicht über weitere, hier nicht beschriebene Operationen, wie die Integration von Formen, bietet z.B. das Buch von NAKAHARA (1990).

A.2 Zu Cartans Strukturgleichungen

Die Geometrie dreidimensionaler Hyperflächen wird beschrieben durch die *Cartan-Strukturgleichungen* (vgl. NAKAHARA [1990], S. 245)

$$\tilde{\omega}_{ab} + \tilde{\omega}_{ba} = \mathbf{d}G_{ab} \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{d}\eta^a + \tilde{\omega}^a_b \wedge \eta^b = \mathbf{T}^a \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{d}\tilde{\omega}^a_b + \tilde{\omega}^a_c \wedge \tilde{\omega}^c_b = \Omega^a_b \quad (\text{A.23})$$

Dabei wird (A.21) auch als Nullte Strukturgleichung bezeichnet. Sie ist die Bedingung dafür, dass der affine Zusammenhang metrisch ist. Zusammen mit der Ersten Cartangleichung (A.22) reproduziert sie diesen vollständig, während die Zweite Strukturgleichung (A.23) die Form des Riemanntensor R^i_{jkl} festlegt. Die Größen auf der rechten Seite sind die Metrik-Nullform G_{ab} , die Torsions-Einsform \mathbf{T}^a , und die Krümmungs-Zweiform

$$\Omega^a_b \equiv \frac{1}{2} R^a_{bcd} \eta^c \wedge \eta^d \quad (\text{A.24})$$

Außerdem sei $\tilde{\omega}^a_b$ definiert als

$$\tilde{\omega}^a_b \equiv \tilde{\gamma}^a_{cb} \eta^c \quad (\text{A.25})$$

Hier wird die Tilde benutzt, um im Folgenden verschiedene Ausdrücke unterscheiden zu können, die jeweils die erste Strukturgleichung erfüllen. Diese ist nämlich

$$(\eta^a_{l|k} + \tilde{\gamma}^a_{cb} \eta^c_k \eta^b_l) \mathbf{d}X^k \wedge \mathbf{d}X^l = 0 \quad (\text{A.26})$$

und damit

$$\eta^a_{[l|k]} + \tilde{\gamma}^a_{[cb]} \eta^c_k \eta^b_l = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\gamma}^a_{[cb]} = -e_c^k e_b^l \eta^a_{[l|k]} \quad (\text{A.27})$$

Wegen

$$\eta^a_{[k||l]} = \eta^a_{[k|l]} \quad (\text{A.28})$$

hat diese Gleichung mehrere Lösungen, die wie folgt definiert werden können,⁸¹

$$\gamma^a_{cb} \equiv -e_c^k e_b^l \eta^a_{l||k} \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}^a_{cb} \equiv -e_c^k e_b^l \eta^a_{l|k} \quad (\text{A.29})$$

$$\gamma'^a_{cb} \equiv +e_c^k e_b^l \eta^a_{k|l} \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}'^a_{cb} \equiv +e_b^k e_c^l \eta^a_{k||l} \quad (\text{A.30})$$

Sowohl Vorzeichen als auch Art der Ableitung werden durch die Nullte Strukturgleichung festgelegt. Die jeweils zweiten Ausdrücke sind Tensoren, deswegen können sie ganz einfach in die Koordinatenbasis transformiert werden. Das funktioniert bei den ersten Ausdrücken auch, obwohl hier keine Tensoren vorliegen, weil die Indizes a und b frei sind. Es ist

$$\gamma^i_{lk} = -e_a^i \eta^a_{k|l} \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}^i_{lk} = -e_a^i \eta^a_{k||l} \quad (\text{A.31})$$

Zum besseren Verständnis und für eine einfachere Schreibweise seien außerdem die Strukturkonstanten

$$C_{ilk} \equiv G_{ab} \eta^a_i \eta^b_{[k||l]} = G_{ab} \eta^a_i \eta^b_{[k|l]} \quad (\text{A.32})$$

definiert als Lösungen der Ersten Cartangleichung. Damit gilt insbesondere $C_{ilk} = \bar{\gamma}_{i[lk]} = \gamma_{i[lk]}$. Die Nullte Strukturgleichung kann nun bestimmen, welcher der beiden Ausdrücke im folgenden übernommen werden soll. Sie ist

$$\mathbf{d}G_{ab} = \tilde{\omega}_{ab} + \tilde{\omega}_{ba} = G_{ac} \tilde{\gamma}^c_{db} \boldsymbol{\eta}^d + G_{bc} \tilde{\gamma}^c_{da} \boldsymbol{\eta}^d \quad (\text{A.33})$$

Es ist zu prüfen, welcher der vorangegangenen Ausdrücke diese Bedingung erfüllt. Die Erste Cartangleichung ist für $\bar{\gamma}^a_{cb}$ erfüllt, es gilt

$$\begin{aligned} G_{ac} \bar{\gamma}^c_{db} \boldsymbol{\eta}^d + G_{bc} \bar{\gamma}^c_{da} \boldsymbol{\eta}^d &= -(G_{ac} e_b^l \eta^c_{l||k} + G_{bc} e_a^l \eta^c_{l||k}) \mathbf{d}X^k \\ &= \mathbf{d}G_{ab} \end{aligned}$$

Für die einfachen γ^a_{cb} resultiert die Strukturgleichung in

$$\begin{aligned} G_{ac} \gamma^c_{db} \boldsymbol{\eta}^d + G_{bc} \gamma^c_{da} \boldsymbol{\eta}^d &= -(G_{ac} e_b^l \eta^c_{l|k} + G_{bc} e_a^l \eta^c_{l|k}) \mathbf{d}X^k \\ &= \mathbf{d}G_{ab} - e_a^k e_b^l g_{kl|m} \mathbf{d}X^m \end{aligned}$$

Sie wird also in diesem zweiten Fall nicht erfüllt. Diese Strukturgleichung legt außerdem das Vorzeichen in (A.29) fest, das durch die vorherige Rechnung

⁸¹ Zu diesen so genannten Ricci-Rotationskoeffizienten siehe z.B. auch CHANDRASEKHAR (1979); EDGAR (1980).

noch nicht bestimmt war, weil die beiden Ausdrücke mit positivem Vorzeichen die Gleichung nicht erfüllen können.

Durch die Strukturgleichung (A.23) soll nun die Form des Krümmungstensors bestimmt werden. Zunächst zeigt sich direkt in Nichtkoordinatenbasis

$$R^a_{bcd} = \bar{\gamma}^a_{db|c} - \bar{\gamma}^a_{cb|d} + \bar{\gamma}^a_{ce} \bar{\gamma}^e_{db} - \bar{\gamma}^a_{de} \bar{\gamma}^e_{cb} - 2\bar{\gamma}^a_{eb} \bar{\gamma}^e_{[cd]} \quad (\text{A.34})$$

Die Rechnung in der Koordinatenbasis ist aus der Strukturgleichung

$$\begin{aligned} R^i_{j[kl]} &= 2e_a^i \eta_j^b (\bar{\gamma}^a_{cb} \eta_{[l|k]}^c + \bar{\gamma}^a_{cb|[k} \eta_{l]}^c + \bar{\gamma}^a_{dc} \bar{\gamma}^c_{eb} \eta_{[k}^d \eta_{l]}^e) \\ &= 2(\bar{\gamma}^i_{[lj||k]} + \bar{\gamma}^i_{[lm} \bar{\gamma}^m_{k]j}) \end{aligned}$$

und damit wegen der Antisymmetrie in den hinteren beiden Indizes

$$R^i_{jkl} = \bar{\gamma}^i_{lj||k} - \bar{\gamma}^i_{kj||l} + \bar{\gamma}^i_{lm} \bar{\gamma}^m_{kj} - \bar{\gamma}^i_{km} \bar{\gamma}^m_{lj} \quad (\text{A.35})$$

An dieser Stelle ist festzuhalten, dass der aus der Strukturgleichung gewonnene Ausdruck nur kovariante Ableitungen enthält und die eigentliche Form des Krümmungstensors darstellt. Bemerkenswert ist außerdem, dass hier kein zusätzlicher, von den Strukturkonstanten abhängiger Term auftritt, wie das für den Ausdruck in Nichtkoordinatenbasis der Fall war, und dass hier zunächst die allgemeinen $\bar{\gamma}^i_{lk}$ statt den Christoffelsymbolen zu verwenden sind. Die übliche Form des Riemannstensors wird im nächsten Abschnitt hergeleitet.

Weiter gestützt wird diese Form des Krümmungstensors durch die intuitive Definition der Raumkrümmung als Kommutationsrelation für die kovariante Ableitung. Aus

$$[\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k] \eta_j^a \equiv R^m_{jkl} \eta_m^a \quad (\text{A.36})$$

ergibt sich nach einfacher Rechnung

$$\begin{aligned} R^i_{jkl} &= e_a^i \eta_{j||k||l}^a - e_a^i \eta_{j||l||k}^a \\ &= (e_a^i \eta_{j||k}^a)_{||l} - (e_a^i \eta_{j||l}^a)_{||k} - e_a^i {}_{||l} \eta_{j||k}^a + e_a^i {}_{||k} \eta_{j||l}^a \\ &= \bar{\gamma}^i_{lj||k} - \bar{\gamma}^i_{kj||l} + \bar{\gamma}^i_{lm} \bar{\gamma}^m_{kj} - \bar{\gamma}^i_{km} \bar{\gamma}^m_{lj} \end{aligned}$$

Der Expansionstensor

Zunächst sei der Expansionstensor definiert als

$$\Theta^i_j \equiv e_a^i \dot{\eta}^a_j = -\dot{e}_a^i \eta^a_j \quad (\text{A.37})$$

Rein als Funktion der η^a_i nimmt er die Form

$$\Theta^i_j = \frac{1}{2J} \epsilon_{abc} \epsilon^{ikl} \dot{\eta}^a_j \eta^b_k \eta^c_l \quad (\text{A.38})$$

an. Es ist mithilfe der Definition der Jacobideterminante J leicht zu sehen, dass

$$\Theta^k_k = \frac{\dot{J}}{J} \quad (\text{A.39})$$

Auf der anderen Seite zeigt sich, indem an die Definition der γ^i_{lk} und $\bar{\gamma}^i_{lk}$ erinnert wird, dass hier

$$\gamma^k_{lk} = -e_a^k \eta^a_{k|l} = -\frac{J_{|l}}{J} \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}^k_{lk} = -e_a^k \eta^a_{k||l} = -\frac{J_{|l}}{J} \quad (\text{A.40})$$

gilt. Bei räumlicher Ableitung der Θ^k_k und zeitlicher Ableitung der beiden letzten Ausdrücke wird erkennbar, dass

$$\Theta^k_{k|l} = -\dot{\gamma}^k_{lk} = -\dot{\bar{\gamma}}^k_{lk} \quad (\text{A.41})$$

Diese einfache Verbindung gilt natürlich zunächst nur für die Spur, allgemein tritt ein zusätzlicher Term auf, i.e.

$$\Theta^i_{k|l} = \dot{\gamma}^i_{lk} + \frac{1}{J} \epsilon_{abc} \epsilon^{imn} (\dot{\eta}^a_m \eta^b_{k|l} + \dot{\eta}^a_k \eta^b_{m|l}) \eta^c_n \quad (\text{A.42})$$

Es ist leicht zu sehen, dass der zweite Term für die Spur, $i = k$, verschwindet, da dann der Ausdruck in Klammern symmetrisch in i und m ist, und wegen der Antisymmetrie von ϵ^{imn} wegfällt.

Die kovariante Ableitung des Expansionstensors ist

$$\Theta^i_{j||k} = \bar{\gamma}^i_{km} \Theta^m_j + e_a^i \dot{\eta}^a_{j||k} \quad (\text{A.43})$$

Vertauschung in den beiden unteren Indizes und Summation über i und j ergibt die Impulsconstraints in einer Form, die ausschließlich von den $\bar{\gamma}^i_{lk}$

und dem Expansionstensor abhängt, nämlich

$$\dot{\gamma}^i_{[ki]} = \frac{1}{2} (\bar{\gamma}^i_{im} \Theta^m_k - \bar{\gamma}^i_{mk} \Theta^m_i) \quad (\text{A.44})$$

Die linke Seite ist schon in einer Form, die zeitlich integriert werden kann, für die rechte Seite muss das noch gewährleistet werden.

Zudem ist bemerkenswert, dass allgemein

$$\gamma^i_{ki} = \Gamma^i_{ki} \quad (\text{A.45})$$

und damit auch

$$\Theta_{|k} = \dot{\Gamma}^i_{ki} \quad (\text{A.46})$$

Die kovariante Ableitung

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt die kovariante Ableitung eingeführt wurde, soll nun untersucht werden, wie die Vertauschungsrelation von Zeitableitung mit kovarianter Ableitung aussieht. Es gelten

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^a_{k||l} &= \dot{\eta}^a_{k|l} - \Gamma^j_{lk} \dot{\eta}^a_j \\ (\eta^a_{k||l})^\cdot &= \dot{\eta}^a_{k|l} - \Gamma^j_{lk} \dot{\eta}^a_j - \dot{\Gamma}^j_{lk} \eta^a_j \end{aligned}$$

und damit

$$\dot{\eta}^a_{k||l} - (\eta^a_{k||l})^\cdot = \dot{\Gamma}^j_{lk} \eta^a_j \quad (\text{A.47})$$

Hier kann die äußere Krümmung verwendet werden, d.h.

$$K_{ij} \equiv -\frac{1}{2} \dot{g}_{ij} = -G_{ab} \dot{\eta}^a_{(i} \eta^b_{j)} \quad (\text{A.48})$$

Damit ist

$$\dot{\Gamma}^j_{ilk} = K_{kl|i} - K_{ik|l} - K_{il|k} \quad (\text{A.49})$$

und schließlich

$$\dot{\Gamma}^j_{lk} \eta^a_j = G^{ab} e_b{}^i (K_{kl|i} - K_{ik|l} - K_{il|k} - 2K_{im} \Gamma^m_{lk}) \quad (\text{A.50})$$

Betrachtungen für $G_{ab|i} = 0$

$$\bar{\gamma}^i_{lk} = -e_a{}^i \eta^a_{k||l} \quad \Rightarrow \quad \bar{\gamma}_{ilk} = -G_{ab} \eta^a_i \eta^b_{k||l} \quad (\text{A.51})$$

$$\gamma^i_{lk} = -e_a{}^i \eta^a_{k|l} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{ilk} = -G_{ab} \eta^a_i \eta^b_{k|l} \quad (\text{A.52})$$

Durch die kovariante Ableitung der Triade

$$\eta^a_{k||l} = \eta^a_{k|l} - \Gamma^j_{lk} \eta^a_j$$

hängen die beiden Ausdrücke einfach über

$$\bar{\gamma}^i_{lk} = \gamma^i_{lk} + \Gamma^i_{lk} \quad (\text{A.53})$$

zusammen. Außerdem wird sofort ersichtlich, dass wegen (A.51) bzw. (A.52) und der Symmetrie der Metrik

$$\gamma_{ilk} + \gamma_{kli} = -g_{ik|l} \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}_{ilk} + \bar{\gamma}_{kli} = 0 \quad (\text{A.54})$$

gilt. Mithilfe dieser Relation können die Christoffelsymbole als Funktion der γ_{ilk} bestimmt werden zu

$$\Gamma_{ilk} = \gamma_{k[i|l]} + \gamma_{l[ik]} - \gamma_{i(lk)} \quad (\text{A.55})$$

Damit ist es nun auch möglich, die Γ_{ilk} aus (A.53) zu eliminieren. Es ergibt sich

$$\bar{\gamma}_{ilk} = \gamma_{i[lk]} + \gamma_{k[i|l]} + \gamma_{l[ik]} \quad (\text{A.56})$$

Die übliche kovariante Ableitung kann aufgrund der hier gefundenen Vorzeichen für die γ^i_{lk} und $\bar{\gamma}^i_{lk}$ nicht verallgemeinert werden, auch nicht für den Spezialfall der Metrik, denn es gilt

$$g_{ij|k} - \bar{\gamma}^m_{ki} g_{mj} - \bar{\gamma}^m_{kj} g_{im} = g_{ij|k} - (\bar{\gamma}_{jki} + \bar{\gamma}_{ikj}) = g_{ij|k} \neq g_{ij||k}$$

und

$$g_{ij|k} - \gamma^m_{ki} g_{mj} - \gamma^m_{kj} g_{im} = g_{ij|k} - (\gamma_{jki} + \gamma_{ikj}) = 2g_{ij|k} \neq g_{ij||k}$$

Mittels (A.55) wird nun die kovariante Ableitung der Triade durch partielle Ableitungen ausgedrückt. Es gilt

$$\eta^a_{k||l} = \eta^a_{[k|l]} + G^{ab} G_{cd} e_b^i (\eta^c_l \eta^d_{[k|i]} + \eta^c_k \eta^d_{[l|i]}) \quad (\text{A.57})$$

Es war anhand der Ersten Strukturgleichung schon zu sehen, dass sich dieser Ausdruck in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil spaltet. Aus (A.56) kann die zu (A.55) analoge Relation hergeleitet werden,

$$\bar{\gamma}_{i(lk)} + \bar{\gamma}_{l[ki]} + \bar{\gamma}_{k[li]} = 0 \quad (\text{A.58})$$

Als Rechenhilfe ergibt sich noch die Möglichkeit, die kovarianten Ableitungen von η^a_i und e_b^j ineinander umzurechnen, denn

$$G^{ab}e_b^j g_{ij||k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta^a_{i||k} = -\eta^a_j \eta^b_i e_b^j{}_{||k} \quad (\text{A.59})$$

Das sollte insbesondere für die Berechnung der Impulsconstraints von Vorteil sein. Nun soll die explizite Form der Christoffelsymbole, ausgedrückt durch die Triade η^a_i , angegeben werden. Diese ist

$$\Gamma^i_{lk} = e_a^i \eta^a_{(l|k)} + G_{ab} G^{cd} e_c^i e_d^j (\eta^a_k \eta^b_{[j|l]} + \eta^a_l \eta^b_{[j|k]}) \quad (\text{A.60})$$

Mit Hilfe der Relation (A.53) kann der Riemannntensor (A.35) nun in seiner üblichen Darstellung mit den Christoffelsymbolen angegeben werden. Es zeigt sich wie erwartet, dass

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{lj|k} - \Gamma^i_{kj|l} + \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{kj} \quad (\text{A.61})$$

Bemerkenswert, aber richtig, ist hier, dass sich im hinteren Teil durch das Auflösen der kovarianten Ableitung das Vorzeichen umgedreht hat. Was in Ausdruck (A.35) noch nach falschem Vorzeichen aussah, ist dadurch gerechtfertigt.

Betrachtungen für $G_{ab|i} \neq 0$

Zunächst sei angemerkt, dass Tensoren nur als Ganzes transformiert werden dürfen, nicht aber teilweise. So ist insbesondere

$$e_c^i G_{ab||i} \neq G_{ab||c} \quad (\text{A.62})$$

denn $G_{ab||i} = G_{ab|i} \neq 0$, aber $G_{ab||c} = e_a^i e_b^j e_c^k g_{ij||k} = 0$.

Wieder gelten an dieser Stelle die Beziehungen (A.51) und (A.52). Durch die kovariante Ableitung der Triade

$$\eta^a_{k||l} = \eta^a_{k|l} - \Gamma^j_{lk} \eta^a_j$$

hängen die beiden Ausdrücke einfach über

$$\bar{\gamma}^i_{lk} = \gamma^i_{lk} + \Gamma^i_{lk} \quad (\text{A.63})$$

zusammen. Außerdem ist sofort zu sehen, dass wegen der Symmetrie der Metrik

$$\gamma_{ilk} + \gamma_{kli} = G_{ab|i} \eta^a_i \eta^b_k - g_{ik|l} \quad (\text{A.64})$$

gilt. Mithilfe dieser Relation können die Christoffelsymbole als Funktion der γ_{ikl} bestimmt werden. Sie sind

$$\Gamma_{ikl} = \gamma_{k[i]l} + \gamma_{l[i]k} - \gamma_{i(kl)} + \frac{1}{2} (G_{ab|i} \eta_k^a \eta_l^b - G_{ab|k} \eta_i^a \eta_l^b - G_{ab|l} \eta_k^a \eta_i^b) \quad (\text{A.65})$$

Damit kann nun auch Γ_{ilk} aus (A.63) eliminiert werden. So ergibt sich

$$\bar{\gamma}_{ilk} = \gamma_{i[l]k} + \gamma_{l[i]k} + \gamma_{l[i]k} + \frac{1}{2} (G_{ab|i} \eta_k^a \eta_l^b - G_{ab|k} \eta_i^a \eta_l^b - G_{ab|l} \eta_k^a \eta_i^b) \quad (\text{A.66})$$

Nun wird die kovariante Ableitung der Triade durch partielle Ableitungen ausgedrückt. Es gilt

$$\eta_{k||l}^a = \eta_{[k|l]}^a - \delta^{ab} \delta_{cd} e_b^i (\eta_{(k}^c \eta_{l)}^d)_{|i} - \eta_{(k}^c \eta_{i|l)}^d \quad (\text{A.67})$$

Es ist bemerkenswert, dass sich der gefundene Ausdruck automatisch in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil spaltet. Dadurch gilt sofort

$$\eta_{[k||l]}^a = \eta_{[k|l]}^a \quad (\text{A.68})$$

und die Strukturkonstanten können definiert werden als

$$C_{ilk} \equiv G_{ab} \eta_i^a \eta_{[k||l]}^b = G_{ab} \eta_i^a \eta_{[k|l]}^b \quad (\text{A.69})$$

Es ist also $C_{ilk} = \bar{\gamma}_{i[l]k} = \gamma_{i[l]k}$. In die vorangegangenen Relationen eingesetzt ergibt sich wieder die zu (A.55) analoge Relation

$$\bar{\gamma}_{i(lk)} + \bar{\gamma}_{l[k]i} - \bar{\gamma}_{k[i]l} = 0 \quad (\text{A.70})$$

Durch das Verschwinden der kovarianten Ableitung der Metrik gilt für die $\bar{\gamma}_{ilk}$ außerdem die Antisymmetriebedingung

$$\bar{\gamma}_{ilk} + \bar{\gamma}_{kli} = 0 \quad (\text{A.71})$$

Nun ist die explizite Form der Christoffelsymbole, ausgedrückt durch die Coframes η_i^a ,

$$\Gamma_{lk}^i = e_a^i \eta_{(k|l)}^a - e_a^i \eta_{(k|l)}^a \quad (\text{A.72})$$

beziehungsweise

$$\Gamma_{lk}^i = e_a^i \eta_{(k|l)}^a - G_{ab} G^{cd} e_c^i e_d^j (\eta_k^a \eta_{[l]j}^b + \eta_l^a \eta_{[k]j}^b) \quad (\text{A.73})$$

Anhang B

Anhang: Das Programm CHIP-MINK

Bei dem hier vorgestellten Programmcode handelt es sich um die Weiterentwicklung eines Programmes, das in erster Version 1998 von Jens Schmalzing und Andreas Rabus geschrieben wurde, siehe RABUS (1998). Im Zuge der vollständigen Überarbeitung wurden die Routinen zur Datenverarbeitung und insbesondere der Teil zur Berechnung des Strukturvolumens als Nulltem Minkowskifunktional neu eingefügt. Auch große Teile der Berechnung der übrigen drei Funktionale wurden neu umgesetzt und effektiver geschrieben. Im Folgenden soll der Programmcode CHIPMINK vorgestellt werden. CHIPMINK setzt exakt die Vorgehensweise zur Berechnung der Minkowskifunktionale um, die im Abschnitt 3.2 der vorliegenden Arbeit besprochen wurde.

B.1 Ein Werkzeug zur Strukturuntersuchung

In diesem Anhang wird zunächst in (B.1.1) die dem Programm beigelegte README-Datei aufgeführt, die dem Leser einen einfachen Einstieg in das Kompilieren und Bedienen des Programmcodes CHIPMINK bietet. Insbesondere wird hier Schritt für Schritt ein erster Testlauf zu einem Poisson-Prozess durchgeführt, um den Benutzer mit der Struktur des Programms und seinen Ausgabedateien vertraut zu machen.

Im folgenden Abschnitt (B.1.2) wird der Hauptteil des Programmcodes, die Datei `main.chipmink.c` gelistet, um die Logik, nach der das Programm die Berechnung der Minkowskifunktionale umsetzt, weiter zu verdeutlichen. Auf das Listing der beiden Module, welche die tatsächliche Berechnung beinhalten, der „Rechenknechte“ `minkowski.c` und `geometry.c`, wird aus Platzgründen verzichtet. Sie sind wie der restliche Code und die Dateien zu den Testläufen auf der beiliegenden CD zu finden.

B.1.1 Das CHIPMINK–ReadMe

- 0) About CHIPMINK
- 1) Installing CHIPMINK
- 2) Running a test job
- 3) Computing in detail

- 0) About CHIPMINK

CHIPMINK is a new, completely revised version of a code used to compute the Minkowski functionals (MFs) of point data sets, which was originally written by Jens Schmalzing and Andreas Rabus in 1998, rewritten in 2006/2007 and updated since then by Matthias Ostermann. CHIPMINK (Code for High-speed Investigation of Partial Minkowski Functionals) calculates the partial MFs of a given point data set by means of the germ-grain model, then adds them up and determines the global densities (global MFs normalized by the density of the point sample).

- 1) Installing CHIPMINK

The code consists of four independent modules which are contained in the g-zipped tar-archive 'chipmink.tar.gz'. The file expands upon the following hierarchy of directories:

```
./chipmink/
./chipmink/dat/
./chipmink/res/
./chipmink/src/
./chipmink/src/nbr/
./chipmink/src/mfs/
./chipmink/src/spp/
./chipmink/src/dpp/
```

The source codes of the modules can be found in the directory 'chipmink/src/'. The module 'src/nbr/' determines a list of neighbours, i.e. points in a distance up to a given maximal radius, for any given point data set (in the following just called 'neighborlist'); 'src/mfs/' reads the neighbourlists and calculates the four MFs and puts them into the output file. The third and fourth, additional modules 'src/spp/' and 'src/dpp/' throw randomly distributed points into the unit cube ('spp' for a single Poisson process, resp. 'dpp' for a double Poisson process) and thus provide data which is required for the volume computation as well as for test runs. Information in more detail can be found below.

To compile and link the CHIPMINK modules, use the shell script 'install' in the main directory 'chipmink'. To execute the script, type in

```
sh install
```

on your shell. If needed, you can also compile and link the modules separately using the makefile in the respective directory.

With the shell script 'clean' you can now clear the source directories. It will remove unnecessary files like ".o" etc. For this operation, type "sh clean" in your shell. If you want to remove the executable files as well, use the script 'tidy'.

2) Running a test job

The script 'run' in the main directory runs a test job. The aim is first of all to make sure that the codes were compiled correctly, and secondly in order to demonstrate how to use CHIPMINK. To start the test job, type

```
sh run
```

in your shell. The job should be completed within five to ten minutes. It consists of the following steps:

- The script first creates a temporary directory in the data section '/dat/tmp/' and generates a hierarchy of directories into which the neighbourlists will be written. (It is highly recommended to use the shell script 'makedirectorytree' to create those hierarchies in your own data directories for MF calculation as well.) Next, it creates a directory in the jobs section into which the results will be written, i.e. '/jobs/test/', and copies the executables into that directory. The test run calculates MFs for two data sets, namely a random set without structure generated by a single Poisson process (spp) and a second one with structure, generated by a double Poisson process (dpp).
- The executable 'sppoisson' generates a point data set 'sppoisson.dat' via a single Poisson process, containing 2000 randomly distributed points in the unit cube [0;1] and a further 4000 points 'randata.dat' in the same mask. The parameter sets for these processes are documented in the respective '*.txt' files in the directory 'jobs/test/spp', containing the results.
- Accordingly, the double Poisson executable 'dppoisson' generates a point data set 'dppoisson.dat' via a double Poisson process, containing about 2000 points in the unit cube [0;1] distributed with a certain structure. The parameter sets for this process are documented in the respective '*.txt' files in the directory 'jobs/test/dpp'.
- The executable 'neighbours' determines the neighbourlists (radius 2R) for the two point samples and writes them into the hierarchy of directories in the data section. A documentation file is written into the directory 'jobs/test/spp(dpp)' here as well.
- The main executable 'chipmink' reads the neighbourlists created by 'neighbours'. It first computes the MFs v1-v3. Next, it throws 100.000 Poisson points into the neighbourhood (radius R) of each point of the random data sample and calculates the fraction of those within the structure for each selected radius r. The resulting MFs as well as the list of parameters are written into the output file 'chipmink.res'. The files 'points_s1.txt' and 'nbr_s1.txt' contain the list of the points used and their neighbourlists.

In order to visualize the resulting data, there are gnuplot macros in the jobs directory. To execute them, please type in 'gnuplot spp.gp' in the spp directory for the single Poisson process (resp. 'gnuplot dpp.gp' in the dpp directory). Gnuplot should create the two files 'test.eps' (point data plotted with lines) and 'test_e.eps' (plotted with standard deviations).

NOTE: If you want to view the list of parameters which can be chosen for the different modules, just type in "-?" when executing the respective module.

3) Computing in detail

In the germ-grain model all Minkowski Functionals - apart from the volume - are localized on the surface of the structure. They can therefore be calculated by adding up partial MFs. These can be determined by the local intersection of the spheres. The statistical weight of intersections of more than three spheres is identical to zero, therefore we only take into account intersection circles of two spheres and intersection points of three spheres (triple points).

[Since we avoid boundary effects by neglecting points near the boundary (i.e. twice the maximal radius) we don't have to determine any other intersection parameters.]

All in all, for a given point of the data set we calculate

- a) the uncovered surface area of the sphere around that point,
- b) the intersection circles of the sphere around that point with those of the neighbouring points,
- c) the triple points of the intersection with the spheres around any two neighbours.

After determining the arc length (uncovered segment of the intersection circle) and the area portion of the intersection circles, we are now able to calculate the partial MFs by

- a) $v_1 = A/(4\pi R^2)$, where A is the uncovered surface area of the sphere of radius R,
- b) $v_2 = A/(3\pi R) + l\alpha/(6\pi)$, where $l\alpha$ is the uncovered portion of the arc length segment,
- c) $v_3 = A/(4\pi R^2) + dR/(4\pi\rho) + \epsilon/(4\pi)$, where ρ is the radius of the intersection circle of two spheres and d is the distance of their centers; ϵ , which is called spherical excess, is calculated via the formula of l'Huilier and denotes the contribution of the triple points to the partial Euler characteristic v_3 .

Since the volume of the structure is not localized on the surface of the structure we cannot calculate it in a similar way. We therefore throw randomly distributed points into the mask which was used for the given point data set. Next, we determine the neighbourlists which consist of "real" points (i.e. those of the given point data set!) for these random points. Now, in a second Poisson process, we throw N random points into the points' neighbourhoods and determine whether the random point is covered by a sphere around any of the "real" neighbours or not. Thus we calculate the fraction of volume covered by spheres around "real" points in that area. Hence, we defined a partial MF for the volume similar to v_1 to v_3 . We add up v_0 and normalize it by the overall volume of the observation mask to get the global volume of the structure. (NOTE: Of course, we have to take into account neglecting points near the boundary again, so we actually have to normalize by the volume of the new, smaller mask!)

B.1.2 Der Hauptprogrammteil main.chipmink.c

An dieser Stelle soll der Hauptprogrammteil `main.chipmink.c` gelistet werden, da sich die Logik des Codes hier besonders gut erschließt. Insbesondere lässt die Funktion `minkowski` die partiellen Minkowskifunktionale zu jedem ausgewählten Punkt berechnen und addiert diese zu den globalen Funktionalen auf, vgl. dazu auch RABUS (1998). Die Berechnung selber geschieht in den Modulen `minkowski.c` und `geometry.c`, siehe die der gedruckten Ausgabe dieser Arbeit beigelegte CD. Dabei stellt `minkowski.c` die Additions- und Speicherroutinen der Funktionalen sowie die analytisch berechneten Funktionalen für einen Poisson-Prozess zur Verfügung, in `geometry.c` werden die partiellen Minkowskifunktionale der betrachteten Punktmenge errechnet und an den Hauptteil übergeben. Da aber insbesondere der Programmteil `geometry.c` über 1000 Zeilen lang ist, wird hier auf ein Listing verzichtet.

```

1  /* --- Matthias Ostermann --- last updated 06/10/2013 --- */
2
3  #include <stdio.h>
4  #include <stdlib.h>
5  #include <unistd.h>
6  #include <string.h>
7  #include <math.h>
8  #include <assert.h>
9
10 #undef TIME
11 #undef SHUTUP
12
13 #include "main.h"
14 #include "org.h"
15 #include "geometry.h"
16 #include "minkowski.h"
17 #include "points.h"
18 #include "neighbour.h"
19
20 /* definitions of constants */
21 #define pi 3.141592653589793238462643
22 #define epsilon 1e-10
23 #define infinity 666
24
25 /* declarations */
26 void Leave(int);
27 void minkowski(int, parlist*, RAD*, MFS*, COORDS*, NBRs*);
28
29 /*-----*/
30
31
32
33 int main(int argc, char *argv[])
34 {
35     int i;
36     parlist par;    /* the parameter list */
37     RAD rad;        /* number and list of radii in the Boolean Grain Model */
38     MFS v;          /* minkowski functional stuff */

```

```

39  COORDS crds;      /* galaxy coordinate stuff */
40  NBRS nbr;         /* neighbourlist related stuff */
41  FILE *pfile;      /* output file for points */
42  char *pname=(char*)NULL;
43
44  pname=(char*)malloc(100*sizeof(char)); /* allocate space */
45
46  Default(&par);      /* default values */
47  Argument(argc,argv,&par); /* evaluate command line */
48  initminkowski(&par,&rad,&v); /* initialize list of radii etc. */
49
50  /* main loop for n=par.length samples */
51  for(i=0;i<par.length;i++) {
52      sprintf(pname,"%s/points_s%d.txt",par.rpath,i+1);
53      createfile(pfile,pname); /* output file for the selected galaxies */
54
55      initcoordinates(&crds,par.nin); /* init the array of points */
56      initcount(&nbr); /* init the counting of points and neighbours */
57
58      emptyminkowski(&rad,&v); /* empty Minkowski functional stuff */
59      minkowski(i+1,&par,&rad,&v,&crds,&nbr); /* calculate global Mfs */
60      storefunctionals(&par,&rad,&v); /* store the resulting functionals */
61
62      printpoints(pfile,pname,&crds);
63      freecoordinates(&crds,par.nin);
64  };
65
66  outputfunctionals(&par,&crds,&rad,&v); /* output Minkowski functionals */
67
68  free(pname); /* tidy up */
69  freeminkowski(&v,&rad);
70
71  Leave(0); /* exit the auntie */
72 };
73
74 /*-----*/
75
76
77 void minkowski(int j,parlist*par,RAD*rad,MFS*v,COORDS*crds,NBRS*nbr){
78
79  /* ----- */
80  /* main routine for calculating global Minkowski functionals of an */
81  /* array of points. Main loop first reads a new list of neighbours */
82  /* then calculates the partial Mfs for these neighbours. Mf_0 is */
83  /* read from a file where it has been calculated beforehand. */
84  /* ----- */
85
86  int i,k,muse; int*use; double r,theta,phi,*z,**delta;
87  FILE *infile; char *iname=(char*)NULL; /* input file for neighbours */
88  FILE *nfile; char *nname=(char*)NULL; /* output file for neighbours */
89  DEFTIME;
90
91  inname=(char*)malloc(100*sizeof(char)); /* allocate space */
92  nname=(char*)malloc(100*sizeof(char)); /* allocate space */
93  sprintf(nname, "%s/nbrs_s%d.txt",par->rpath,j);
94  createfile(nfile,nname);
95
96  delta=dmatrix(0,NMOP0-1,0,2);z=dvector(0,2);
97
98  #ifndef SHUTUP

```

```

99     fprintf(stdout,"v1-3 s%d: ",j); fflush(stdout);
100 #endif
101     STARTTIME;
102     for(i=0; i<par->nin; i++){
103
104         STARTTIME;
105 #ifndef SHUTUP
106         if(i%250==0){
107             fprintf(stdout,"%d(%d) -- ",i,par->nin); fflush(stdout);
108         };
109 #endif
110         i_to_filename(i,par->path,inname);
111
112         if(infile=fopen(inname,"r")){
113             if(neighbourlist(infile,nbr,par,2*rad->r[rad->n]) > 0){
114                 printneighbours(nfile,nname,inname,nbr,crds,par);
115
116                 calculatpartial(rad,v,nbr); /* calculate the three partial Mfs */
117                 addpartial(i,par,rad,v,crds); /* add partial to global Mfs */
118                 updatecount(nbr);
119                 updatecoordinates(nbr,crds);
120
121                 freeneighbour(nbr);
122             };
123             fclose(infile);
124
125         };
126
127         STEPTIME("point %d",i);
128     };
129     STOPTIME;
130 #ifndef SHUTUP
131     fprintf(stdout,"done.\n"); fflush(stdout);
132 #endif
133
134     /* throw local Monte Carlo points and */
135     /* calculate the volume of the structure */
136
137     /* throw N directions and distances for the N random points */
138     for(i=0; i<NMOP0; i++){
139         phi=2*pi*rand1(par); theta=acos(2*rand1(par)-1);
140         spherical(z,theta,phi);
141         r=rad->r[rad->n]*pow(rand1(par),1./3.);
142         for(k=0; k<3; k++) delta[i][k]=r*z[k];
143     };
144
145     /* randomly select some of the poisson points */
146     use=ivector(0,par->nmopo-1);
147     muse=uselist(par,&use[0]);
148
149 #ifndef SHUTUP
150     fprintf(stdout,"v0 s%d: ",j); fflush(stdout);
151 #endif
152     STARTTIME;
153     for(i=0; i<par->nmopo; i++){
154
155         STARTTIME;
156 #ifndef SHUTUP
157         if(i%250==0){
158             fprintf(stdout,"%d(%d) -- ",i,par->nmopo); fflush(stdout);

```

```

159     };
160 #endif
161     if(use[i]){
162         i_to_filename(i,par->mpath,inname);
163
164         if(infile=fopen(inname,"r")){
165             if(neighbourlist(infile,nbr,par,2*rad->r[rad->n]) > 0){
166                 calculatepartial_v0(rad,v,nbr,&delta[0]);
167                 addpartial_v0(par,rad,v); /* add partial v0 to global v0 */
168                 freeneighbour(nbr);
169                 crds->snmc++;
170             };
171             fclose(infile);
172             crds->tnmc++;
173
174         };
175
176         STEPTIME("point %d",i);
177     };
178 };
179 STOPTIME;
180 #ifndef SHUTUP
181     fprintf(stdout,"done.\n"); fflush(stdout);
182 #endif
183
184     printstatistics(nfile,nname,crds,nbr,par);
185
186     cleanminkowski(par,rad,v,crds); /* tidy up */
187     free_ivector(use,0,par->nmopo-1);
188     free_dmatrix(&delta[0],0,NMOP0-1,0,2); free_dvector(z,0,2);
189     free((char*)nname);
190     free((char*)inname);
191
192
193     return;
194
195 }
196
197 /*-----*/
198
199 void Leave(int value){
200
201     /* ----- */
202     /* if something is wrong exit this way... */
203     /* ----- */
204
205     exit(value);
206 }
207

```

B.2 Ein exemplarischer Run für den 2dFGRS

Um einen Einblick auch in die Abläufe des Programms zu erhalten, sind hier in (B.2.1) und (B.2.2) für einen Durchlauf des 2dF-Galaxienkatalogs die entsprechenden Ausgabedateien aufgeführt. Am Ende des Abschnittes findet sich außerdem das Script für die Sun Grid Engine (sge), die in den meisten

Rechnernetzen z.B. an Universitäten verwendet wird. Das mag dem Leser eine Hilfe dabei sein, eine Reihe von Durchläufen gleichzeitig im Rechnernetz zu starten.

B.2.1 Durchführung

Vorbereitend sind zu jedem Punkt des Datensatzes Nachbarlisten zu erstellen, z.B. mit Hilfe eines *kd*-Baumes, siehe dazu RABUS (1998). Im hier betrachteten Fall liegen die Nachbarlisten zu jedem Punkt als eigene Datei vor, die in der Form `gal_00.txt` etc. nummeriert sind. Die Dateien sind zudem in einer Ordnerstruktur hierarchisch geordnet, so dass die Galaxie mit der Nummer 3476 z.B. unter `./dat/points/0/0/3/4/gal_76.txt` zu finden ist.

Zunächst werden also diese Dateien eingelesen und damit eine Liste der zur Berechnung der Minkowskifunktionale verwendeten Punkte aufgestellt sowie in der entsprechenden Datei `points.txt` gespeichert. Diese sieht folgendermaßen aus:

```
./points_s1.txt

Pmfs were calculated for 1984 galaxies:

galaxy      x_gal      y_gal      z_gal distance
    0      32.434      72.237     -440.449    447.511
    1      39.236      84.260     -447.458    457.010
    2      40.301      79.430     -431.181    440.285
    3      51.904     100.196     -450.200    464.127

      [.. die uebrigen Galaxien ..]

1981     127.799      84.256     -410.991    438.572
1982     132.527      89.375     -428.093    456.962
1983     127.168      84.473     -406.876    434.575

dmin= 259.456, dmax= 478.343.
```

Gleichzeitig schreibt das Programm eine erste Statistik der verwendeten Daten in das File `neighbour.txt`. Hier ist insbesondere ersichtlich, wie die Datenmenge sich durch das Einrücken um den doppelten maximalen Kugelradius vom Rand der Maske weg verringert.

```
# options
# -n      number of files to read           (actual 10428)
# -p      path to the galaxy input files    (actual ./dat/sgp7)
# -P      path to the galaxy output files   (actual ./dat/points)
# -l      local completeness                (actual 0.8)
# -d      highest distance of neighbors     (actual 8)
# -u      fraction of files to use          (actual 1)
# -o      documentation file                (actual neighbour.txt)
```

```
# -b      minimal distance to border      (actual 8)
# -c      1 celestial, 0 cartesian coordinates(actual 1)
# -x,y,z Random Number Generator seeds    (actual 13181 16703 66)
Total number of galaxy files: = 10428

Total number of galaxies used: = 1984
```

Die Nachbarlisten zu den jeweiligen Punkten finden sich in `nbrs.txt`,

```
./nbrs_s1.txt

./dat/points/0/0/0/0/gal_00.txt (1. file read):

The total number of galaxies is 3, the number of selected galaxies is 3.

row    x_gal    y_gal    z_gal distance
0      32.434    72.237 -440.449    0.000
1       -0.241    -2.162    2.625    3.409
2        1.872    -1.577    -3.926    4.627

./dat/points/0/0/0/0/gal_01.txt (2. file read):

The total number of galaxies is 13, the number of selected galaxies is 13.

row    x_gal    y_gal    z_gal distance
3      39.236    84.260 -447.458    0.000
4       -1.079     0.827    -1.488    2.016
5       -1.133    -0.270    -2.668    2.912
6       -0.086    -0.739    -3.392    3.473
7       -2.087     3.059    -1.387    3.954
8       -3.428    -0.885     1.775    3.961
9       -1.920     0.946    -3.814    4.373
10      -2.380     2.752    -2.586    4.463
11      -3.467     2.117    -3.038    5.073
12      -3.141    -1.030    -4.378    5.486
13      -4.119     3.070    -2.518    5.721
14      -6.428     1.077    -1.088    6.608
15      -3.218     2.993    -5.321    6.902

./dat/points/0/0/0/0/gal_02.txt (3. file read):

The total number of galaxies is 5, the number of selected galaxies is 5.

row    x_gal    y_gal    z_gal distance
16     40.301    79.430 -431.181    0.000
17     -0.471     1.020    -0.000    1.124
18      2.563    -3.979     3.221    5.725
19      1.625     7.011    -1.174    7.292
20     -0.060     6.681    -4.028    7.801

./dat/points/0/0/0/0/gal_03.txt (4. file read):

The total number of galaxies is 2, the number of selected galaxies is 2.

row    x_gal    y_gal    z_gal distance
21     51.904   100.196 -450.200    0.000
22     -1.911    -4.650     5.118    7.174
```

```
[.. alle weiteren Nachbarlisten ..]
```

```
Read 1984 files.
Selected 18545 galaxies of 18545.
```

Nachdem zur Berechnung des Volumens eine Reihe von Poisson-Punkten geworfen wurden, werden schließlich die vier Minkowskifunktionale für steigenden Kugelradius in die Datei `chipmink.res` geschrieben. Dort finden sich auch die für einen Poisson-Prozess gleicher Dichte analytisch berechneten Werte sowie die Varianzen zu den vier Funktionalen.⁸²

```
# options
# -n      number of neighbour files to read      (actual 1984)
# -N      number of random files to read         (actual 3276)
# -p      path to the galaxy input files         (actual ./dat/points)
# -P      path to the random input files         (actual ./dat/random)
# -r      path to the output files               (actual .)
# -o      global functionals output file         (actual chipmink.res)
# -v      volume of galaxy catalogue sample      (actual 1.77714e+06)
# -l      lowest radius of balls                 (actual 0)
# -s      stepwidth of Boolean radii            (actual 0.1)
# -T      do not output theoretical values       (actual false)
# -t      number of points in subsample         (actual 100)
# -c      number of steps for radius             (actual 40)
# -d      number of subsamples                  (actual 1)
# -u      fraction of random points to use      (actual 1)
# -D      depth of catalogue (<0 if n.a.)       (actual -1)
# -O      output point sample to stdout         (actual false)
# -f      partial functionals output file       (actual )
# -B      assume binary input                  (actual ascii)
# -x,y,z  Random Number Generator seeds        (actual 5626 31281 342)
#
# radius   V0          V1          V2          V3
0.00000 +0.0000000000e+00 +0.0000000000e+00 +0.0000000000e+00 +1.1164011369e-03
0.10000 +4.8656898657e-06 +2.3372981332e-05 +1.4875028373e-04 +1.1147130429e-03
0.20000 +3.9093406593e-05 +9.3255292771e-05 +2.9621066877e-04 +1.1065540098e-03
0.30000 +1.3196581197e-04 +2.0913966773e-04 +4.4207988465e-04 +1.0969882045e-03
0.40000 +3.1270146520e-04 +3.7026073980e-04 +5.8543300132e-04 +1.0817953950e-03
0.50000 +6.0918498168e-04 +5.7492270842e-04 +7.2388477114e-04 +1.0627044387e-03
0.60000 +1.0482264957e-03 +8.2209767248e-04 +8.5888890783e-04 +1.0416376242e-03
0.70000 +1.6555647131e-03 +1.1097815939e-03 +9.8828094685e-04 +1.0133352097e-03
0.80000 +2.4554090354e-03 +1.4344734171e-03 +1.1078654165e-03 +9.7316219851e-04
0.90000 +3.4726221001e-03 +1.7931778498e-03 +1.2194393470e-03 +9.3379513797e-04
1.00000 +4.7269536020e-03 +2.1838078056e-03 +1.3247623317e-03 +8.9816346782e-04
1.10000 +6.2331257631e-03 +2.6037092535e-03 +1.4216486855e-03 +8.5770098405e-04
1.20000 +8.0109310134e-03 +3.0490013819e-03 +1.5089744921e-03 +8.1427645513e-04
1.30000 +1.0064734432e-02 +3.5145385949e-03 +1.5842440210e-03 +7.6667732693e-04
1.40000 +1.2419423077e-02 +3.9991449522e-03 +1.6518245744e-03 +7.1842357621e-04
```

⁸²Für das Listing dieser Datei wurde zugunsten der besseren Lesbarkeit auf die Ausgabe der analytischen Werte und der Varianzen sowie auf das Linebreaking verzichtet. Wichtig im Rahmen der vorliegenden Arbeit sind ja zunächst die ersten fünf Spalten, die den aktuellen Kugelradius sowie die vier für die Punktmenge berechneten Minkowskifunktionale beinhalten.

```

1.50000 +1.5069420024e-02 +4.4983013493e-03 +1.7101396089e-03 +6.6938509856e-04
1.60000 +1.8032051282e-02 +5.0063120695e-03 +1.7553233846e-03 +6.2136011162e-04
1.70000 +2.1306617827e-02 +5.5243502133e-03 +1.7973828630e-03 +5.8197171904e-04
1.80000 +2.4897814408e-02 +6.0499484249e-03 +1.8333472180e-03 +5.4904286791e-04
1.90000 +2.8805564713e-02 +6.5796333929e-03 +1.8593271535e-03 +5.0515767977e-04
2.00000 +3.3032991453e-02 +7.1100964402e-03 +1.8784664189e-03 +4.6537366823e-04
2.10000 +3.7569325397e-02 +7.6382957185e-03 +1.8905921715e-03 +4.3212989709e-04
2.20000 +4.2420369353e-02 +8.1687908031e-03 +1.9034441520e-03 +4.0214838601e-04
2.30000 +4.7589197192e-02 +8.6978319354e-03 +1.9138779049e-03 +3.8392604293e-04
2.40000 +5.3065525031e-02 +9.2257061759e-03 +1.9182405210e-03 +3.5042460193e-04
2.50000 +5.8851394994e-02 +9.7480123973e-03 +1.9168176993e-03 +3.2375636441e-04
2.60000 +6.4939059829e-02 +1.0263984124e-02 +1.9122800003e-03 +2.9762119147e-04
2.70000 +7.1327982295e-02 +1.0775118159e-02 +1.9050995881e-03 +2.7565423576e-04
2.80000 +7.7996785714e-02 +1.1279472094e-02 +1.8958588112e-03 +2.5254897280e-04
2.90000 +8.4936410256e-02 +1.1771077253e-02 +1.8748601669e-03 +2.1896187334e-04
3.00000 +9.2140250305e-02 +1.2253108246e-02 +1.8525748756e-03 +1.9311697331e-04
3.10000 +9.9587793040e-02 +1.2710567166e-02 +1.8233277211e-03 +1.7302029675e-04
3.20000 +1.0727903236e-01 +1.3159683725e-02 +1.7981241998e-03 +1.6179724126e-04
3.30000 +1.1520257937e-01 +1.3599499196e-02 +1.7743548730e-03 +1.5166885162e-04
3.40000 +1.2335756410e-01 +1.4030179398e-02 +1.7498582786e-03 +1.3318346516e-04
3.50000 +1.3173710012e-01 +1.4448898486e-02 +1.7225593054e-03 +1.1780349945e-04
3.60000 +1.4033774115e-01 +1.4851811727e-02 +1.6899719809e-03 +9.9163198992e-05
3.70000 +1.4916453297e-01 +1.5240335327e-02 +1.6572744213e-03 +8.6323344023e-05
3.80000 +1.5819981380e-01 +1.5614439598e-02 +1.6241410027e-03 +7.7771936601e-05
3.90000 +1.6743428877e-01 +1.5973583211e-02 +1.5900421983e-03 +6.3947622164e-05
4.00000 +1.7684879121e-01 +1.6314844259e-02 +1.5506122889e-03 +4.8423142281e-05

```

Diese tabellarische Form eignet sich gut zum graphischen Darstellen der Funktionale z.B. mit Hilfe von Gnuplot. Einige Ergebnisse können aber schon direkt abgelesen werden. Wie erwartet nähert sich z.B. das Volumen der im Germ-Grain-Modell entstehenden Struktur bei steigendem Kugelradius dem Gesamtvolumen der Maske an.

Als Hilfestellung für den Leser und der Vollständigkeit halber sei hier noch wie bereits angekündigt das bei diesem Run verwendete sge-Skript gelistet.

```

chipmink#!/bin/sh

## - cwd
## -l vf=2048M
## -j y
## -N sgp70_lc80

PROGRAM1="/home/osterman/minkowski/chipmink_2dF/src/nbr/neighbours"
PROGRAM2="/home/osterman/minkowski/chipmink_2dF/src/nbr_r/rneighbours"
PROGRAM3="/home/osterman/minkowski/chipmink_2dF/src/mfs/chipmink"
FLAGS1="-l.8 -x772 -y9 -z93 -p./dat/sgp7 -P./dat/points"
FLAGS2="-l.8 -x772 -y47 -z229 -p./dat/sgp_pp7 -P./dat/random"
FLAGS3="-v2320769. -s.1 -c40 -x762 -y66 -z12 -p./dat/points -P./dat/random -r."
DATA1="/home/osterman/minkowski/chipmink_2dF/dat/sgp7n.tar.gz"
DATA2="/home/osterman/minkowski/chipmink_2dF/dat/sgp_pp7.tar.gz"
DATA3="/home/osterman/minkowski/chipmink_2dF/dat/makedirectorytree"

# make sure that /data/$USER/ exists
if [ ! -e /data/$USER/ ]; then
    mkdir /data/$USER/

```

```

fi
# create a local directory for this job only
if [ ! -e /data/$USER/job$JOB_ID/ ]; then
    mkdir /data/$USER/job$JOB_ID/
else
# this should never happen
echo "Clean up /data/$USER/ directory on $HOSTNAME"\
| mail -s "SGE-error" $USER
exit 1
fi
# create a local data directory for this job only
if [ ! -e /data/$USER/job$JOB_ID/dat ]; then
    mkdir /data/$USER/job$JOB_ID/dat
fi
# create a local data directory for this job only
if [ ! -e /data/$USER/job$JOB_ID/dat/points ]; then
    mkdir /data/$USER/job$JOB_ID/dat/points
fi
# create a local data directory for this job only
if [ ! -e /data/$USER/job$JOB_ID/dat/random ]; then
    mkdir /data/$USER/job$JOB_ID/dat/random
fi

# create a local copy of the program and start the job
PROG1='basename $PROGRAM1'
PROG2='basename $PROGRAM2'
PROG3='basename $PROGRAM3'
DAT1='basename $DATA1'
DAT2='basename $DATA2'
DAT3='basename $DATA3'
OLDDIR='pwd'
cp $DATA1 /data/$USER/job$JOB_ID/dat/$DAT1
cp $DATA2 /data/$USER/job$JOB_ID/dat/$DAT2
cp $DATA3 /data/$USER/job$JOB_ID/dat/points/$DAT3
cp $DATA3 /data/$USER/job$JOB_ID/dat/random/$DAT3
cp $PROGRAM1 /data/$USER/job$JOB_ID/$PROG1
cp $PROGRAM2 /data/$USER/job$JOB_ID/$PROG2
cp $PROGRAM3 /data/$USER/job$JOB_ID/$PROG3
cd /data/$USER/job$JOB_ID/dat/random
sh $DAT3
cd /data/$USER/job$JOB_ID/dat
tar -xvzf $DAT2
cd /data/$USER/job$JOB_ID
./$PROG2 $FLAGS2 > $PROG2.stdout 2>$PROG2.stderr
cd /data/$USER/job$JOB_ID/dat
rm -r sgp_pp7
cd /data/$USER/job$JOB_ID/dat/points
sh $DAT3
cd /data/$USER/job$JOB_ID/dat
tar -xvzf $DAT1
cd /data/$USER/job$JOB_ID
./$PROG1 $FLAGS1 > $PROG1.stdout 2>$PROG1.stderr
cd /data/$USER/job$JOB_ID/dat
rm -r sgp7

cd /data/$USER/job$JOB_ID
./$PROG3 $FLAGS3 > $PROG3.stdout 2>$PROG3.stderr

# copy all output files back to your home directory
# and clean up

```

```
rm $PROG1 $PROG2 $PROG3
rm -r /data/$USER/job$JOB_ID/dat
cd /data/$USER/
cp -R /data/$USER/job$JOB_ID/ $OLDDIR && rm -r /data/$USER/job$JOB_ID/
```

B.2.2 Ergebnisse

Als Ergänzung zu den im Hauptteil, Abschnitt 3.3, gezeigten Graphen seien hier noch die für den exemplarischen Run bei einem Kugelradius von bis zu 3 Mpc erhaltenen sowohl globalen als auch reduzierten Minkowskifunktionale dargestellt.

	SGP	NGP
# an Galaxien im Volumen-lim. Sample	10428	10777
max. Kugelradius	3 Mpc	3 Mpc
# an Galaxien gewählt für $\lambda = 0.75$	3620	4276
# an Galaxien gewählt für $\lambda = 0.80$	3444	3930
# an Galaxien gewählt für $\lambda = 0.85$	3050	3275

Tabelle B.1: Statistik der verwendeten 2dFGRS-Datensätze

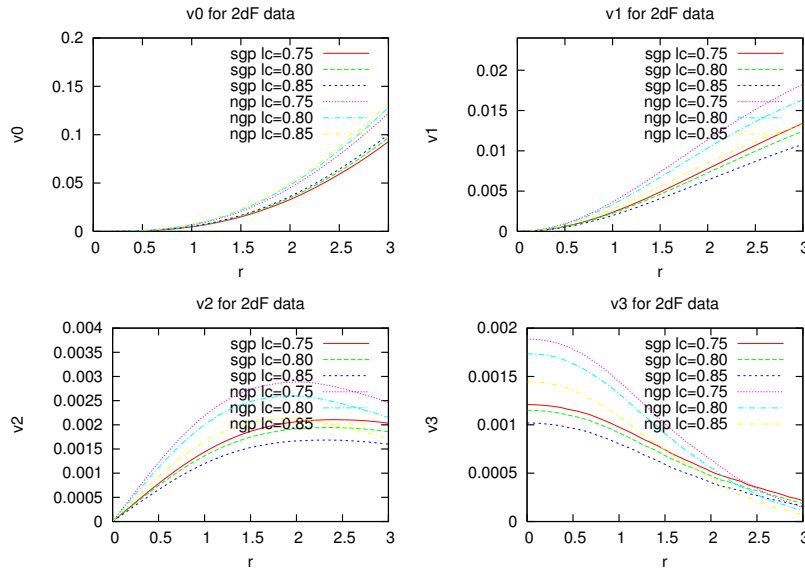


Abbildung B.1: Die vier globalen Minkowskifunktionale für verschiedene 2dFGRS-Subsamples mit einem Radius von bis zu 3 Mpc und lokaler Vollständigkeit $lc = 0.75 - 0.85$.

B.3 Anwendung in der Polymerphysik

In einer der ersten Anwendungen des neu gestalteten Programmcodes zur Berechnung der Minkowskifunktionale beliebiger dreidimensionaler Punktmengen stellten Jens Schmalzing und ich ihn Dr. Markus Hütter zur Verfügung, der zu diesem Zeitpunkt an der ETH Zürich an Untersuchungen zur Heterogenität und dem Zusammenhang kolloidaler (gallertartiger) Teilchensysteme arbeitete.

Auf seine Anfrage hin bestimmten wir die Minkowskifunktionale zu verschiedenen Testdatensätzen, die er mit Hilfe dynamischer Simulationen erstellt hatte. Ziel der Untersuchung sollte sein, die Auswirkungen verschiedener Parameter wie der Geschwindigkeit der Koagulation (Verfestigung) oder des von den Teilchen eingenommen Volumenanteils auf die entstehenden Strukturen zu bestimmen.

Schon in den ersten Testläufen zeigte sich, dass die Minkowskifunktionale hier als Deskriptoren sehr gut geeignet waren. Änderungen der Parameter führten zu deutlich verschiedenen Graphen aller vier Funktionale und machten damit die Unterschiede der in der Simulation entstandenen Strukturen deutlich. Besonders der Einfluss des Volumenanteils scheint markant, der entsprechende Graph mit Volumenanteil 20% weicht deutlicher als die beiden anderen von einer homogenen Verteilung ab. Abnehmender Volumenanteil und/oder die Existenz einer Energiebarriere scheinen demnach die Entwicklung heterogener Strukturen zu unterstützen. Letztendlich mündete die Verwendung unseres Programmcodes in der Veröffentlichung HÜTTER (2003) durch Dr. Hütter.

Die oberen vier Graphen in Abbildung B.2 zeigen die globalen normierten Minkowskifunktionale zur Koagulation eines kolloidalen Polymers mit einer Volumenfraktion 40% und langsamer Koagulation, d.h. mit Energiebarriere. Zum Vergleich sind jeweils auch die Funktionale eines einfachen Poisson-Prozesses gleicher Dichte aufgetragen. In den unteren vier Graphen sind die Minkowski-Funktionale für drei simulierte Gel-Datensätze zu sehen. Gel 407 hat die Volumenfraktion 40% und schnelle Koagulation (keine Energiebarriere), Gel 425 hat die Volumenfraktion 40% und langsame Koagulation (Energiebarriere), Gel 426 schließlich die Volumenfraktion 20% und schnelle Koagulation (keine Energiebarriere).

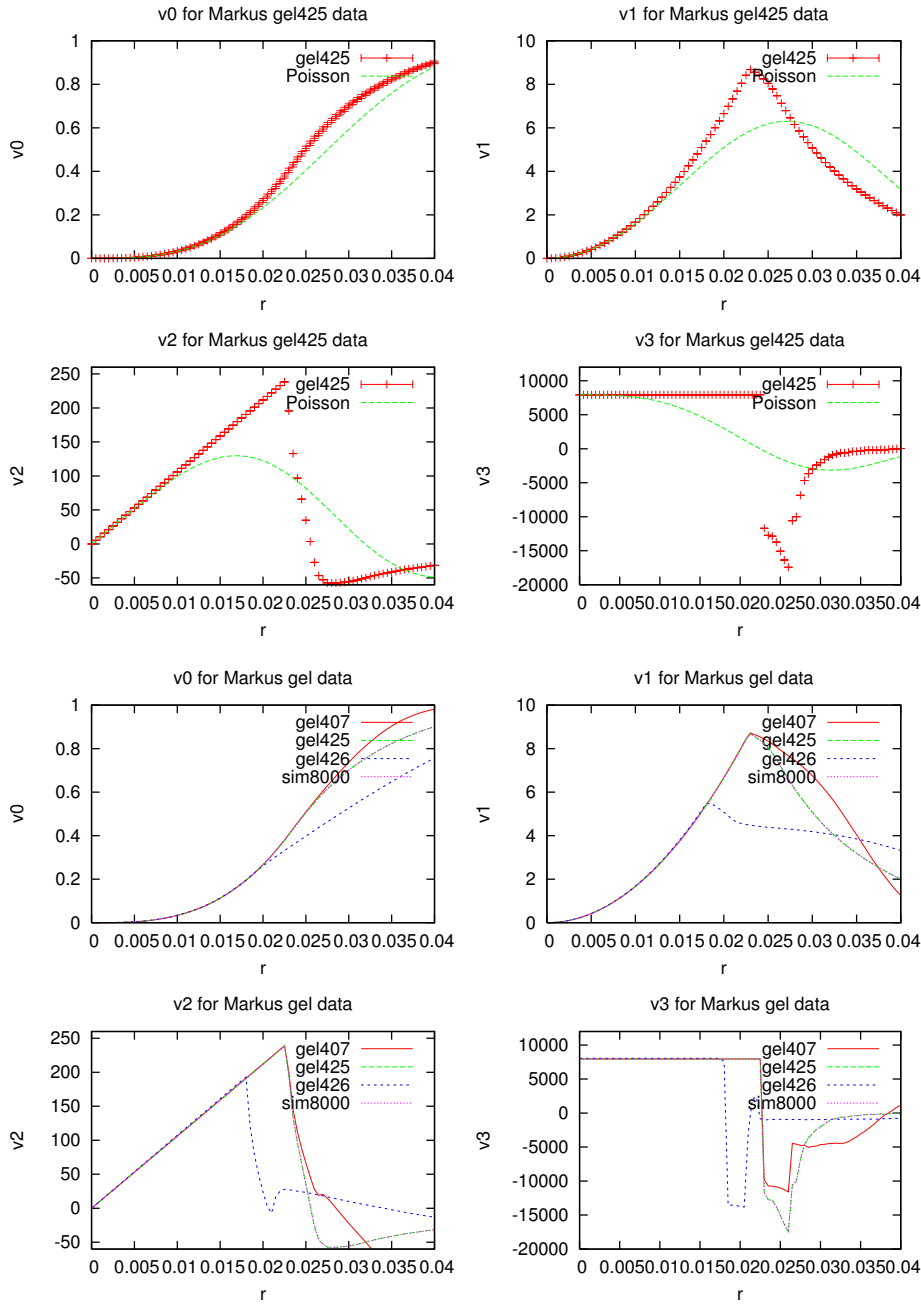


Abbildung B.2: Oben: Normierte Minkowskifunktionale zur Koagulation eines kolloidalen Polymers mit einer Volumenfraktion 40% und langsamer Koagulation (d.h. mit Energiebarriere). Unten: Minkowski-Funktionale für drei simulierte Gel-Datensätze.

Literatur

- ABAZAJIAN, K., J. K. ADELMAN-McCARTHY, M. A. AGÜEROS, S. S. ALLAM, S. F. ANDERSON, J. ANNIS, N. A. BAHCALL et al. (2003): „The First Data Release of the Sloan Digital Sky Survey“. *Astron. J.* 126, S. 2081–2086.
- ABAZAJIAN, K. N., J. K. ADELMAN-McCARTHY, M. A. AGÜEROS, S. S. ALLAM, C. ALLENDE PRIETO, D. AN, K. S. J. ANDERSON, S. F. ANDERSON, J. ANNIS, N. A. BAHCALL et al. (2009): „The Seventh Data Release of the Sloan Digital Sky Survey“. *Astrophys. J. Supp.* 182, S. 543–558.
- ADE, P. A. R., N. AGHANIM, C. ARMITAGE-CAPLAN, M. ARNAUD, M. ASHDOWN, F. ATRIO-BARANDELA, J. AUMONT, C. BACCIGALUPI, A. J. BANDAY et al. (2013): „Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results“. *arXiv.org/astro-ph* 1303.5062.
- ADELMAN-McCARTHY, J. K. und DIE SDSS-KOLLABORATION (2006): „The Fourth Data Release of the Sloan Digital Sky Survey“. *Astrophys. J. Supp.* 162, S. 38–48.
- ADLER, S. und T. BUCHERT (1999): „Lagrangian theory of structure formation in pressure-supported cosmological fluids“. *Astron. & Astrophys.* 343, S. 317.
- AHN, C. P., R. ALEXANDROFF, C. ALLENDE PRIETO, F. ANDERS, S. F. ANDERSON, T. ANDERTON, B. H. ANDREWS, É. AUBOURG, S. BAILEY, F. A. BASTIEN et al. (2014): „The Tenth Data Release of the Sloan Digital Sky Survey: First Spectroscopic Data from the SDSS-III Apache Point Observatory Galactic Evolution Experiment“. *Astrophys. J. Supp.* 211, S. 17.
- ANDRADE, V. C. de, L. C. T. GUILLEN und J. G. PEREIRA (2000): „Gravitational Energy-Momentum Density in Teleparallel Gravity“. *Phys. Rev. Lett.* 84, S. 4533.
- ARNOL'D, V. I., S. F. SHANDARIN und Ya. B. ZEL'DOVICH (1982): „The large scale structure of the universe. I - General properties One- and two-dimensional models“. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 20, S. 111–130.
- ARNOWITT, R., S. DESER und C. W. MISNER (1962): „The dynamics of general relativity“. In: *Gravitation: an introduction to current research*. Hrsg. von Louis WITTEN. New York, London: John Wiley & Sons, S. 227–265.

- ASADA, H. und M. KASAI (1999): „Lagrangian description of fluid flow with vorticity in relativistic cosmology“. *Phys. Rev. D* 59, S. 123515.
- BAHCALL, N. A. und R. M. SONEIRA (1983): „The spatial correlation function of rich clusters of galaxies“. *Astrophys. J.* 270, S. 20–38.
- BARROW, J. D. und S. HERVIK (2002): „The Weyl tensor in Spatially Homogeneous Cosmological Models“. *Class. Quant. Grav.* 19, S. 5173.
- BEISBART, C. und T. BUCHERT (1998): „Characterizing Cluster Morphology Using Vector-Valued Minkowski Functionals“. In: *Large Scale Structure: Tracks and Traces*. Hrsg. von V. MUELLER, S. GOTTLOEBER, J. P. MUECKET und J. WAMBSGANSS, S. 197–200.
- BEISBART, C., R. VALDARNINI und T. BUCHERT (2001): „The morphological and dynamical evolution of simulated galaxy clusters“. *Astron. & Astrophys.* 379, S. 412–425.
- BEISBART, C., R. DAHLKE, K. MECKE und H. WAGNER (2002): „Vector- and Tensor-Valued Descriptors for Spatial Patterns“. In: *Lecture Notes in Physics, 600. Morphology of Condensed Matter*. Hrsg. von K.R. MECKE und D. STOYAN. Berlin, u.a.: Springer Verlag, S. 238–260.
- BEISBART, C., M. S. BARBOSA, H. WAGNER und L. D. F. COSTA (2006): „Extended morphometric analysis of neuronal cells with Minkowski valuations“. *European Physical Journal B* 52, S. 531–546.
- BERTSCHINGER, E. (1992): „Large-Scale Structures and Motions: Linear Theory and Statistics“. In: *New Insights into the Universe*. Hrsg. von V. J. MARTINEZ, M. PORTILLA und D. SAEZ. Bd. 408. Lecture Notes in Physics. Berlin, u.a.: Springer Verlag, S. 65.
- BERTSCHINGER, E. und A. J. S. HAMILTON (1994): „Lagrangian evolution of the Weyl tensor“. *Astrophys. J.* 435, S. 1.
- BERTSCHINGER, E. und B. JAIN (1994): „Gravitational instability of cold matter“. *Astrophys. J.* 431, S. 486–494.
- BILDHAUER, S., T. BUCHERT und M. KASAI (1992): „Solutions in Newtonian cosmology - The pancake theory with cosmological constant“. *Astron. & Astrophys.* 263, S. 23.
- BLAKE, C., J. B. JAMES und G. B. POOLE (2014): „Using the topology of large-scale structure in the WiggleZ Dark Energy Survey as a cosmological standard ruler“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 437, S. 2488–2506.
- BOUCHET, F. R. (1996): „Introductory Overview of Eulerian and Lagrangian Perturbation Theories“. In: *Dark Matter in the Universe*. Hrsg. von S. BONOMETTO, J. R. PRIMACK und A. PROVENZALE, S. 565.
- BOYLAN-KOLCHIN, M., V. SPRINGEL, S. D. M. WHITE, A. JENKINS und G. LEMSON (2009): „Resolving cosmic structure formation with the Millennium-II Simulation“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 398, S. 1150–1164.

- BUCHERT, T. (1989): „A class of solutions in Newtonian cosmology and the pancake theory“. *Astron. & Astrophys.* 223, S. 9.
- (1992): „Lagrangian theory of gravitational instability of Friedman-Lemaitre cosmologies and the 'Zel'dovich approximation'“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 254, S. 729.
- (1993): „Lagrangian perturbation theory – a keymodel for large-scale structure“. *Astron. & Astrophys.* 267, S. L51.
- (1995): „Lagrangian perturbation approach to the formation of large-scale structure“. In: *Proc. Int. School of Physics Enrico Fermi Course CXXXII: Dark Matter in the Universe*. Hrsg. von S. BONOMETTO, J.R. PRIMACK und A. PROVENZALE. IOS Press, S. 543–564.
- (2000a): „On average properties of inhomogeneous cosmologies“. In: *9th JGRG Meeting, Hiroshima 1999*. Hrsg. von Y. ERIGUCHI et al., S. 306–321.
- (2000b): „On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: dust cosmologies“. *Gen. Relativ. Gravit.* 32, S. 105.
- (2001): „On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: perfect fluid cosmologies“. *Gen. Relativ. Gravit.* 33, S. 1381.
- (2006a): „On globally static and stationary cosmologies with or without a cosmological constant and the dark energy problem“. *Class. Quant. Grav.* 23, S. 817–844.
- (2006b): „The non-perturbative regime of cosmic structure formation“. *Astron. & Astrophys.* 454, S. 415–422.
- (2008): „Dark Energy from structure – a status report“. *Gen. Relativ. Gravit.* 40, S. 467.
- (2011): „Toward physical cosmology: focus on inhomogeneous geometry and its non-perturbative effects“. *Class. Quant. Grav.* 28, S. 164007.
- BUCHERT, T. und M. CARFORA (2002): „Regional averaging and scaling in relativistic cosmology“. *Class. Quant. Grav.* 19, S. 6109–6145.
- (2003): „Cosmological parameters are dressed“. *Phys. Rev. Lett.* 90, S. 031101.
- (2008): „On the curvature of the present day universe“. *Class. Quant. Grav.* 25, S. 195001.
- BUCHERT, T. und J. EHLERS (1997): „Averaging inhomogeneous Newtonian cosmologies“. *Astron. & Astrophys.* 320, S. 1.
- BUCHERT, T., M. KERSCHER und C. SICKA (2000): „Backreaction of inhomogeneities on the expansion: The evolution of cosmological parameters“. *Phys. Rev. D* 62, S. 043525.

- BUCHERT, T. und V. J. MARTINEZ (1993): „Two-point correlation function in pancake models and the fair sample hypothesis“. *Astrophys. J.* 411, S. 485–500.
- BUCHERT, T., C. NAYET und A. WIEGAND (2013): „Lagrangian theory of structure formation in relativistic cosmology II: average properties of a generic evolution model“. *Phys. Rev. D* 87, S. 123503.
- BUCHERT, T. und M. OSTERMANN (2012): „Lagrangian theory of structure formation in relativistic cosmology: Lagrangian framework and definition of a nonperturbative approximation“. *Phys. Rev. D* 86, S. 023520.
- BUCHERT, T. und S. RÄSÄNEN (2012): „Backreaction in late-time cosmology“. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 62, S. 57.
- CARTAN, É. (1923): „Sur les variétés à connexion affine et la theorie de la relativité généralisé. I“. *Ann. Ec. Norm.* 40, S. 325.
- (1924): „Sur les variétés à connexion affine et la theorie de la relativité généralisé. II“. *Ann. Ec. Norm.* 41, S. 1.
- (1925): „Sur les variétés à connexion affine et la theorie de la relativité généralisé. III“. *Ann. Ec. Norm.* 42, S. 17.
- CHANDRASEKHAR, S. (1979): „An introduction to the theory of the Kerr metric and its perturbations.“ In: *General Relativity: An Einstein centenary survey*. Hrsg. von S. W. HAWKING und W. ISRAEL, S. 370–453.
- (1983): *The Mathematical Theory of Black Holes*. Cambridge Univ. Press.
- CHOI, Y.-Y., J. KIM, G. ROSSI, S. S. KIM und J.-E. LEE (2013): „Topology of Luminous Red Galaxies from the Sloan Digital Sky Survey“. *Astrophys. J. Supp.* 209, S. 19.
- CLARKSON, C., G. F. R. ELLIS, J. LARENA und O. UMEH (2011): „Does the growth of structure affect our dynamical models of the Universe? The averaging, backreaction, and fitting problems in cosmology“. *Rep. Prog. Phys.* 74, S. 112901.
- CLAYTON, M. A. (1997): „The Tetrad Frame Constraint Algebra“. *Class. Quant. Grav.* 14, S. 1851.
- CLOWES, R. G., K. A. HARRIS, S. RAGHUNATHAN, L. E. CAMPUSANO, I. K. SÖCHTING und M. J. GRAHAM (2013): „A structure in the early Universe at $z \sim 1.3$ that exceeds the homogeneity scale of the R-W concordance cosmology“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 429, S. 2910–2916.
- COLE, S., S. HATTON, D. H. WEINBERG und C. S. FRENK (1998): „Mock 2dF and SDSS galaxy redshift surveys“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 300, S. 945–966.
- COLLESS, M. (1999): „First results from the 2dF Galaxy Redshift Survey“. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A* 357, S. 105.

- COLLESS, M., G. DALTON, S. MADDOX, W. SUTHERLAND, P. NORBERG, S. COLE, J. BLAND-HAWTHORN, T. BRIDGES, R. CANNON, C. COLLINS, W. COUCH, N. CROSS, K. DEELEY, R. DE PROPRIS, S. P. DRIVER, G. EFSTATHIOU, R. S. ELLIS, C. S. FRENK, K. GLAZEBROOK, C. JACKSON, O. LAHAV, I. LEWIS, S. LUMSDEN, D. MADGWICK, J. A. PEACOCK, B. A. PETERSON, I. PRICE, M. SEABORNE und K. TAYLOR (2001): „The 2dF Galaxy Redshift Survey: spectra and redshifts“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 328, S. 1039–1063.
- COLLESS, M., B. A. PETERSON, C. JACKSON, J. A. PEACOCK, S. COLE, P. NORBERG, I. K. BALDRY, C. M. BAUGH, J. BLAND-HAWTHORN, T. BRIDGES, R. CANNON, C. COLLINS, W. COUCH, N. CROSS, G. DALTON, R. DE PROPRIS, S. P. DRIVER, G. EFSTATHIOU, R. S. ELLIS, C. S. FRENK, K. GLAZEBROOK, O. LAHAV, I. LEWIS, S. LUMSDEN, S. MADDOX, D. MADGWICK, W. SUTHERLAND und K. TAYLOR (2003): „The 2dF Galaxy Redshift Survey: Final Data Release“. *ArXiv Astrophysics e-prints* 0306581. eprint: [arXiv:astro-ph/0306581](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0306581).
- CROTON, D. J., V. SPRINGEL, S. D. M. WHITE, G. DE LUCIA, C. S. FRENK, L. GAO, A. JENKINS, G. KAUFFMANN, J. F. NAVARRO und N. YOSHIDA (2006): „The many lives of active galactic nuclei: cooling flows, black holes and the luminosities and colours of galaxies“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 365, S. 11–28.
- CROUDACE, K. M., J. PARRY, D. S. SALOPEK und J. M. STEWART (1994): „Applying the Zel’dovich approximation to general relativity“. *Astrophys. J.* 423, S. 22.
- DAUTCOURT, G. (1997): „Post-Newtonian extension of the Newton - Cartan theory“. *Class. Quant. Grav.* 14, A109.
- DAVIS, M. und P. J. E. PEEBLES (1983): „A survey of galaxy redshifts. V - The two-point position and velocity correlations“. *Astrophys. J.* 267, S. 465–482.
- DEVEVER, R. (1979): *Elie Cartan and Albert Einstein: Letters on Absolute Parallelism*. Princeton: Princeton Univ. Press.
- DOROSHKEVICH, A. G., V. S. RYABENKII und S. F. SHANDARIN (1973): „Non-linear theory of development of potential perturbations“. *Astrofizika* 9, S. 257.
- DOROSHKEVICH, A. G., R. FONG, S. GOTTLÖBER, J. P. MUCKET und V. MULLER (1997): „The formation and evolution of large- and superlarge-scale structure in the Universe - II. N-body simulations“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 284, S. 633–654.

- DOROSHKEVICH, A. G., D. L. TUCKER, S. ALLAM und M. J. WAY (2004): „Large scale structure in the SDSS galaxy survey“. *Astron. & Astrophys.* 418, S. 7–23.
- EDGAR, S. B. (1980): „The structure of tetrad formalisms in general relativity - The general case“. *Gen. Relativ. Gravit.* 12, S. 347–362.
- EHLERS, J. (1961): „Beiträge zur relativistischen Mechanik kontinuierlicher Medien“. *Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abh. Math.-Nat. Klasse* 11, S. 793.
- (1997): „Examples of Newtonian limits of relativistic spacetimes“. *Class. Quant. Grav.* 14, A119.
- EHLERS, J. und T. BUCHERT (1997): „Newtonian Cosmology in Lagrangian Formulation: Foundations and Perturbation Theory“. *Gen. Relativ. Gravit.* 29, S. 733.
- (2009): „On the Newtonian limit of the Weyl tensor“. *Gen. Relativ. Gravit.* 41, S. 2153.
- EINASTO, M., E. SAAR, L. J. LIIVAMÄGI, J. EINASTO, E. TAGO, V. J. MARTÍNEZ, J.-L. STARCK, V. MÜLLER, P. HEINÄMÄKI, P. NURMI, M. GRAMANN und G. HÜTSI (2007): „The richest superclusters. I. Morphology“. *Astron. & Astrophys.* 476, S. 697–711.
- EINASTO, M., L. J. LIIVAMÄGI, E. TEMPEL, E. SAAR, E. TAGO, P. EINASTO, I. ENKVIST, J. EINASTO, V. J. MARTÍNEZ, P. HEINÄMÄKI und P. NURMI (2011): „The Sloan Great Wall. Morphology and Galaxy Content“. *Astrophys. J.* 736, S. 51.
- EINSTEIN, A. (1928): „Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus“. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* S. 217.
- ELLIS, G. F. R. (1971): „Relativistic Cosmology“. In: *General Relativity and Cosmology*. Hrsg. von R. K. SACHS, S. 104–182.
- (2009): „Republication of: Relativistic Cosmology“. *Gen. Relativ. Gravit.* 41, S. 581–660.
- (2011): „Inhomogeneity effects in cosmology“. *Class. Quant. Grav.* 28, S. 164001.
- ELLIS, G. F. R. und T. BUCHERT (2005): „The universe seen at different scales [rapid communication]“. *Phys. Lett. A* 347, S. 38.
- ELLIS, G. F. R. und P. K. S. DUNSBY (1997): „Newtonian evolution of the Weyl tensor“. *Astrophys. J.* 479, S. 97.
- ELLIS, G. F. R. und C. G. TSAGAS (2002): „Relativistic approach to nonlinear peculiar velocities and the Zel’dovich approximation“. *Phys. Rev. D* 66, S. 140150.
- ELLIS, G. F. R. und H. VAN ELST (1999): „Cosmological Models (Cargèse lectures 1998)“. In: *NATO ASIC Proc. 541: Theoretical and Observational Cosmology*. Hrsg. von M. LACHIÉZE-REY, S. 1–116.

- FODOR, G., M. MARKLUND und Z. PERJÉS (1999): „Axistationary perfect fluids - a tetrad approach“. *Class. Quant. Grav.* 16, S. 453.
- FUKUGITA, M., T. ICHIKAWA, J. E. GUNN, M. DOI, K. SHIMASAKU und D. P. SCHNEIDER (1996): „The Sloan Digital Sky Survey Photometric System“. *Astron. J.* 111, S. 1748.
- GOTT III, J. R., M. JURIĆ, D. SCHLEGEL, F. HOYLE, M. VOGLEY, M. TEGMARK, N. BAHCALL und J. BRINKMANN (2005): „A Map of the Universe“. *Astrophys. J.* 624, S. 463–484.
- GOTT III, J. R., D. C. HAMBRICK, M. S. VOGLEY, J. KIM, C. PARK, Y.-Y. CHOI, R. CEN, J. P. OSTRICKER und K. NAGAMINE (2008): „Genus Topology of Structure in the Sloan Digital Sky Survey: Model Testing“. *Astrophys. J.* 675, S. 16–28.
- GUNN, J. E. et al. (1998): „The Sloan Digital Sky Survey Photometric Camera“. *Astron. J.* 116, S. 3040–3081.
- (2006): „The 2.5 m Telescope of the Sloan Digital Sky Survey“. *Astron. J.* 131, S. 2332–2359.
- HADWIGER, H. (1957): *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Berlin: Springer.
- HANISCH, K. H. (1981): „On Classes of Random Sets and Point Process Models.“ *Serdica Bulgariacae Mathematicae Publicationes* 7, S. 160–166.
- HEINRICH, L. (1992): „On Existence and Mixing Properties of Germ-Grain Models“. *Statistics* 23, S. 271–286.
- HERRERA, L. (2003): „The Weyl Tensor and Equilibrium Configurations of Self-Gravitating Fluids“. *Gen. Relativ. Gravit.* 35 (3), S. 437–448.
- HIKAGE, C., E. KOMATSU und T. MATSUBARA (2006): „Primordial Non-Gaussianity and Analytical Formula for Minkowski Functionals of the Cosmic Microwave Background and Large-scale Structure“. *Astrophys. J.* 653, S. 11–26.
- HIKAGE, C. und T. MATSUBARA (2012): „Limits on second-order non-Gaussianity from Minkowski functionals of WMAP 7-year data“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 425, S. 2187–2196.
- HIKAGE, C., Y. SUTO, I. KAYO, A. TARUYA, T. MATSUBARA, M. S. VOGLEY, F. HOYLE, J. R. GOTT III und J. BRINKMANN (2002): „Three-Dimensional Genus Statistics of Galaxies in the SDSS Early Data Release“. *Publ. Astron. Soc. Jap.* 54, S. 707–717.
- HIKAGE, C., J. SCHMALZING, T. BUCHERT, Y. SUTO, I. KAYO, A. TARUYA, M. S. VOGLEY, F. HOYLE, J. R. GOTT III und J. BRINKMANN (2003): „Minkowski Functionals of SDSS galaxies I: Analysis of excursion sets“. *Publ. Astron. Soc. Jap.* 55, S. 911–931.

- HOSOYA, A., T. BUCHERT und M. MORITA (2004): „Information Entropy in Cosmology“. *Phys. Rev. Lett.* 92, S. 141302.
- HUCHRA, J. P., M. J. GELLER und H. G. CORWIN Jr. (1995): „The CfA Redshift Survey: Data for the NGP +36 Zone“. *Astrophys. J. Supp.* 99, S. 391.
- HUCHRA, J. P., M. J. GELLER, V. DE LAPPARENT und H. G. CORWIN Jr. (1990): „The CfA redshift survey - Data for the NGP + 30 zone“. *Astrophys. J. Supp.* 72, S. 433–470.
- HÜTTER, M. (2003): „Heterogeneity of colloidal particle networks analyzed by means of Minkowski functionals“. *Phys. Rev. E* 68, S. 031404.
- ITIN, Y. (2001): „Coframe teleparallel models of gravity. Exact solutions“. *Int. J. Mod. Phys. D* 10, S. 547.
- JENKINS, A., C. S. FRENK, F. R. PEARCE, P. A. THOMAS, J. M. COLBERG, S. D. M. WHITE, H. M. P. COUCHMAN, J. A. PEACOCK, G. EFSTATHIOU und A. H. NELSON (1998): „Evolution of Structure in Cold Dark Matter Universes“. *Astrophys. J.* 499, S. 20.
- KASAI, M. (1995): „Tetrad-based perturbative approach to inhomogeneous universes: A general relativistic version of the Zel’dovich approximation“. *Phys. Rev. D* 52, S. 5605.
- KAZIN, E. A., M. R. BLANTON, R. SCOCCIMARRO, C. K. MCBRIDE, A. A. BERLIND, N. A. BAHCALL, J. BRINKMANN, P. CZARAPATA, J. A. FRIEMAN, S. M. KENT, D. P. SCHNEIDER und A. S. SZALAY (2010): „The Baryonic Acoustic Feature and Large-Scale Clustering in the Sloan Digital Sky Survey Luminous Red Galaxy Sample“. *Astrophys. J.* 710, S. 1444.
- KEENAN, R. C., A. J. BARGER und L. L. COWIE (2013): „Evidence for a ~ 300 Megaparsec Scale Under-density in the Local Galaxy Distribution“. *Astrophys. J.* 775, S. 62.
- KERSCHER, M. (1999): „The geometry of second-order statistics - biases in common estimators“. *Astron. & Astrophys.* 343, S. 333–347.
- (2000): „Statistical analysis of large-scale structure in the Universe“. In: *Lecture Notes in Physics, 554. Statistical Physics and Spatial Statistics*. Hrsg. von K. R. MECKE und D. STOYAN. Berlin, u.a.: Springer Verlag, S. 36–71.
- KERSCHER, M., J. SCHMALZING und T. BUCHERT (1996): „Analyzing Galaxy Catalogues with Minkowski Functionals“. In: *Mapping, Measuring, and Modelling the Universe*. Hrsg. von P. COLES, V. MARTINEZ und M.-J. PONS-BORDERIA. Bd. 94. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, S. 247.

- KERSCHER, M., J. SCHMALZING, J. RETZLAFF, S. BORGANI, T. BUCHERT et al. (1997): „Minkowski functionals of Abell / ACO clusters“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 284, S. 73.
- KERSCHER, M., J. SCHMALZING, T. BUCHERT und H. WAGNER (1997): „The significance of the fluctuations in the IRAS 1.2 Jy galaxy catalogue“. In: *Research in Particle-Astrophysics*. Hrsg. von R. BENDER, T. BUCHERT, P. SCHNEIDER und F. VON FEILITZSCH, S. 83.
- (1998): „Fluctuations in the IRAS 1.2 Jy catalogue“. *Astron. & Astrophys.* 333, S. 1–12.
- KERSCHER, M., K. MECKE, J. SCHMALZING, C. BEISBART, T. BUCHERT et al. (2001a): „Morphological fluctuations of large scale structure: The PSCz survey“. *Astron. & Astrophys.* 373, S. 1–11.
- KERSCHER, M., K. MECKE, P. SCHUECKER, H. BOEHRINGER, L. GUZZO, C.A. COLLINS, S. SCHINDLER, S. DE GRANDI und R. CRUDDACE (2001b): „Non-Gaussian morphology on large scales: Minkowski functionals of the REFLEX cluster catalogue“. *Astron. & Astrophys.* 377, S. 1–16.
- KOFMAN, L. und D. POGOSYAN (1995): „Dynamics of gravitational instability is nonlocal“. *Astrophys. J.* 442, S. 30.
- KOLB, E. W. (2011): „Backreaction of inhomogeneities can mimic dark energy“. *Class. Quant. Grav.* 28, S. 164009.
- KONGTRUL, Jamgön (1995): *Myriad Worlds*. Ithaca, Boulder: Snow Lion Publications.
- LARENA, J., J.-M. ALIMI, T. BUCHERT, M. KUNZ und P.-S. CORASANITI (2009): „Testing backreaction effects with observations“. *Phys. Rev. D* 79, S. 083011.
- LESAME, W. M., G. F. R. ELLIS und P. K. S. DUNSBY (1996): „Irrotational dust with $\text{div} H = 0$ “. *Phys. Rev. D* 53, S. 738–746.
- LEWIS, I. J., R. D. CANNON, K. TAYLOR, K. GLAZEBROOK, J. A. BAILEY, I. K. BALDRY, J. R. BARTON, T. J. BRIDGES, G. B. DALTON, T. J. FARRELL, P. M. GRAY, A. LANKSHEAR, C. MCCOWAGE, I. R. PARRY, R. M. SHARPLES, K. SHORTRIDGE, G. A. SMITH, J. STEVENSON, J. O. STRAEDE, L. G. WALLER, J. D. WHITTARD, J. K. WILCOX und K. C. WILLIS (2002): „The Anglo-Australian Observatory 2dF facility“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 333, S. 279–299.
- LUSANNA, L. und S. RUSSO (2002): „A New Parametrization for Tetrad Gravity“. *Gen. Relativ. Gravit.* 34, S. 189.
- MAARTENS, R. und B. A. BASSETT (1998): „Gravito-electromagnetism“. *Class. Quant. Grav.* 15, S. 705–717.

- MACCALLUM, M. A. H. (1998): „Integrability in Tetrad Formalisms and Conservation in Cosmology“. In: *Proceedings of the International Seminar Current Topics in Mathematical Cosmology: Potsdam, Germany, 30 March - 4 April 1998*. Hrsg. von H.-J. und M. Rainer SCHMIDT. Singapur, u.a.: World Scientific, S. 133.
- MADGWICK, D. S., O. LAHAV, I. K. BALDRY, C. M. BAUGH, J. BLAND-HAWTHORN, T. BRIDGES, R. CANNON, S. COLE, M. COLLESS, C. COLLINS, W. COUCH, G. DALTON, R. DE PROPRIS, S. P. DRIVER, G. EFSTATHIOU, R. S. ELLIS, C. S. FRENK, K. GLAZEBROOK, C. JACKSON, I. LEWIS, S. LUMSDEN, S. MADDUX, P. NORBERG, J. A. PEACOCK, B. A. PETERSON, W. SUTHERLAND und K. TAYLOR (2002): „The 2dF Galaxy Redshift Survey: galaxy luminosity functions per spectral type“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 333, S. 133–144.
- MANGOLDT, v. H. und K. KNOPP (1990): *Höhere Mathematik*. 15. Aufl. Bd. 3. Stuttgart: S. Hirzel.
- MANTZ, H., K. JACOBS und K. MECKE (2008): „Utilizing Minkowski functionals for image analysis: a marching square algorithm“. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 12, S. 15.
- MARTINEZ, V. J., B. J. T. JONES, R. DOMINGUEZ-TENREIRO und R. VAN DE WEYGAERT (1990): „Clustering paradigms and multifractal measures“. *Astrophys. J.* 357, S. 50–61.
- MATARRESE, S., S. MOLLERACH und M. BRUNI (1998): „Relativistic second-order perturbations of the Einstein-de Sitter universe“. *Phys. Rev. D* 58, S. 3504.
- MATARRESE, S., O. PANTANO und D. SAEZ (1994a): „A Relativistic Approach to Gravitational Instability in the Expanding Universe - Second-Order Lagrangian Solutions“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 271, S. 513.
- (1994b): „General relativistic dynamics of irrotational dust: Cosmological implications“. *Phys. Rev. Lett.* 72, S. 320.
- MATARRESE, S. und D. TERRANOVA (1996a): „Lagrangian Dynamics of Collisionless Matter“. In: *Mapping, Measuring, and Modelling the Universe*. Hrsg. von P. COLES, V. MARTINEZ und M.-J. PONS-BORDERIA. Bd. 94. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, S. 25.
- (1996b): „Post-Newtonian cosmological dynamics in Lagrangian coordinates“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 283, S. 400.
- MCBRIDE, C., A. BERLIND, R. SCOCCIMARRO, R. WECHSLER, M. BUSHA, J. GARDNER und F. VAN DEN BOSCH (2009): „LasDamas Mock Galaxy Catalogs for SDSS“. In: *American Astronomical Society Meeting Abstracts #213*. Bd. 41. Bulletin of the American Astronomical Society, S. 425.06.

- MCBRIDE, C., A. A. BERLIND, R. SCOCCIMARRO, M. MANERA, J. TINKER, M. BUSHA, R. WECHSLER, H. WU und F. VAN DEN BOSCH (2011): „Las-Damas: Accurate Determination of the Abundance of Galaxy Clusters“. In: *American Astronomical Society Meeting Abstracts #217*. Bd. 43. Bulletin of the American Astronomical Society, S. 249.07.
- MECKE, K. R. (2000): „Additivity, Convexity, and Beyond: Applications of the Minkowski Functionals in Statistical Physics“. In: *Lecture Notes in Physics, 554. Statistical Physics and Spatial Statistics*. Hrsg. von K.R. MECKE und D. STOYAN. Berlin, u.a.: Springer Verlag, S. 111–184.
- MECKE, K. R., T. BUCHERT und H. WAGNER (1994): „Robust morphological measures for large-scale structure in the Universe“. *Astron. & Astrophys.* 288, S. 697.
- MECKE, K. R. und H. WAGNER (1991): „Euler Characteristic and Related Measures for Random Geometric Sets“. *J. Stat. Phys.* 64, S. 843.
- MELOTT, A. L. (1990): „The topology of large-scale structure in the universe“. *Phys. Rep.* 193, S. 1–39.
- MELOTT, A. L. und S. F. SHANDARIN (1990): „Generation of large-scale cosmological structures by gravitational clustering“. *Nature* 346, S. 633–635.
- MISNER, C., K. THORNE und J. WHEELER (1973): *Gravitation*. New York: Freeman.
- MORITA, M., K. NAKAMURA und M. KASAI (1998a): „Erratum: Relativistic Zel’dovich approximation in a spherically symmetric model [Phys. Rev. D 57, 6094 (1998)]“. *Phys. Rev. D* 58, S. 089903.
- (1998b): „Relativistic Zel’dovich approximation in a spherically symmetric model“. *Phys. Rev. D* 57, S. 6094–6103.
- MUKHANOV, V. F., H. A. FELDMAN und R. H. BRANDENBERGER (1992): „Theory of cosmological perturbations“. *Phys. Rep.* 215, S. 203.
- NADATHUR, S. (2013): „Seeing patterns in noise: gigaparsec-scale ‘structures’ that do not violate homogeneity“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 434, S. 398–406.
- NADATHUR, S. und S. HOTCHKISS (2014): „A robust public catalogue of voids and superclusters in the SDSS Data Release 7 galaxy surveys“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 440, S. 1248–1262.
- NAKAGAMI, T., T. MATSUBARA, J. SCHMALZING und Y. JING (2004): „An Analysis of the large scale N-body simulation using the Minkowski functionals“. *arXiv.org/astro-ph* 0408428.
- NAKAHARA, M. (1990): *Geometry, Topology and Physics*. Bristol, Philadelphia: IOP Publishing.

- NORBERG, P., S. COLE, C. M. BAUGH, C. S. FRENK, I. BALDRY, J. BLAND-HAWTHORN, T. BRIDGES, R. CANNON, M. COLLESS, C. COLLINS, W. COUCH, N. J. G. CROSS, G. DALTON, R. DE PROPRIIS, S. P. DRIVER, G. EFSTATHIOU, R. S. ELLIS, K. GLAZEBROOK, C. JACKSON, O. LAHAV, I. LEWIS, S. LUMSDEN, S. MADDOX, D. MADGWICK, J. A. PEACOCK, B. A. PETERSON, W. SUTHERLAND, K. TAYLOR und DAS 2dFGRS-TEAM (2002): „The 2dF Galaxy Redshift Survey: the b_J -band galaxy luminosity function and survey selection function“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 336, S. 907–931.
- NOVIKOV, D., H. A. FELDMAN und S. F. SHANDARIN (1999): „Minkowski functionals and cluster analysis for CMB maps“. *Int. J. Mod. Phys.* D8, S. 291–306.
- NOVIKOV, D., J. SCHMALZING und V. F. MUKHANOV (2000): „On nongaussianity in the cosmic microwave background“. *Astron. & Astrophys.* 364, S. 17–25.
- OSTERMANN, M. (2003): „Grundlagen der Formulierung einer Lagrangeschen Störungstheorie in der relativistischen Kosmologie“. Diplomarbeit. LMU München.
- OSTERMANN, M., J. SCHMALZING und C. BEISBART: „Minkowski Functionals of the 2dF“. *unpublished*.
- PARK, C., Y.-Y. CHOI, J. KIM, J. R. GOTT III, S. S. KIM und K.-S. KIM (2012): „The Challenge of the Largest Structures in the Universe to Cosmology“. *Astrophys. J. Lett.* 759, S. L7.
- PEEBLES, P. J. E. (1980): *The Large Scale Structure of the Universe*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- PENROSE, R. (1979): „Singularities and Time-Asymmetry“. In: *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*. Hrsg. von S. W. HAWKING und W. ISRAEL. Cambridge: Cambridge Univ. Press, S. 581.
- PLATZÖDER, M. und T. BUCHERT (1996): „Applications of Minkowski-Functionals to the Statistical Analysis of Dark Matter Models“. In: *Astro-Particle Physics*. Hrsg. von A. WEISS, G. RAFFELT, W. HILLEBRANDT, F. VON FEILITZSCH und T. BUCHERT, S. 251.
- PUETZFELD, D. (2002a): „A cosmological model in Weyl-Cartan spacetime: I. Field equations and solutions“. *Class. Quant. Grav.* 19, S. 3263.
- (2002b): „A cosmological model in Weyl-Cartan spacetime: II. Magnitude-redshift relation“. *Class. Quant. Grav.* 19, S. 4463.
- PUETZFELD, D. und R. TRESGUERRES (2001): „A cosmological model in Weyl-Cartan spacetime“. *Class. Quant. Grav.* 18, S. 677.

- RABUS, A. (1998): „Anwendung morphologischer Maße auf Simulationen dunkler Materie und auf Galaxienkataloge“. Diplomarbeit. LMU München.
- RAMELLA, M., M. J. GELLER und J. P. HUCHRA (1992): „The distribution of galaxies within the 'Great Wall'“. *Astrophys. J.* 384, S. 396–403.
- RÄSÄNEN, S. (2006): „Accelerated expansion from structure formation“. *J. C. A. P.* 11, S. 003.
- (2011): „Backreaction: directions of progress“. *Class. Quant. Grav.* 28, S. 164008.
- RUDJORD, Ø., Ø. GRØN und S. HERVIK (2008): „The Weyl curvature conjecture and black hole entropy“. *Physica Scripta* 77, S. 055901.
- RÜEDE, C. und N. STRAUMANN (1997): „On Newton-Cartan Cosmology“. *Helv. Phys. Acta* 70, S. 318.
- RUSS, H., M. MORITA, M. KASAI und G. BÖRNER (1996): „Zel’dovich-type approximation for an inhomogeneous universe in general relativity: Second-order solutions“. *Phys. Rev. D* 53, S. 6881.
- RUSS, H., M. H. SOFFEL, M. KASAI und G. BÖRNER (1997): „Age of the universe: Influence of the inhomogeneities on the global expansion factor“. *Phys. Rev. D* 56, S. 2044.
- SAAR, E., V. J. MARTÍNEZ, J.-L. STARCK und D. L. DONOHO (2007): „Multiscale morphology of the galaxy distribution“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 374, S. 1030–1044.
- SAHNI, V. und P. COLES (1995): „Approximation methods for non-linear gravitational clustering“. *Phys. Rep.* 262, S. 1.
- SAHNI, V., B. S. SATHYAPRAKASH und S. F. SHANDARIN (1998): „Shapefinders: A New Shape Diagnostic for Large-Scale Structure“. *Astrophys. J. Lett.* 495, S. L5–L8.
- SALOPEK, D. S., J. M. STEWART und K. M. CROUDACE (1994): „The Zel’dovich Approximation and the relativistic Hamilton–Jacobi Equation“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 271, S. 1005.
- SATHYAPRAKASH, B. S., V. SAHNI und S. SHANDARIN (1998): „Morphology of Clusters and Superclusters in N-Body Simulations of Cosmological Gravitational Clustering“. *Astrophys. J.* 508, S. 551–569.
- SCHMALZING, J. (1999): „On Statistics and Dynamics of Cosmic Structure“. Diss. LMU München.
- SCHMALZING, J. und T. BUCHERT (1997): „Beyond genus statistics: A Unifying approach to the morphology of cosmic structure“. *Astrophys. J.* 482, S. L1–L4.
- SCHMALZING, J. und A. DIAFERIO (2000): „Topology and geometry of the CfA2 redshift survey“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 312, S. 638–648.

- SCHMALZING, J. und K. M. GORSKI (1998): „Minkowski functionals used in the morphological analysis of cosmic microwave background anisotropy maps“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 297, S. 355–365.
- SCHMALZING, J., M. KERSCHER und T. BUCHERT (1995): „Minkowski Functionals in Cosmology“. In: *Proc. Int. School of Physics Enrico Fermi Course CXXXII: Dark Matter in the Universe*. Hrsg. von S. BONOMETTO, J.R. PRIMACK und A. PROVENZALE. IOS Press, 281 ff.
- SCHMALZING, J., M. TAKADA und T. FUTAMASE (2000): „Effects of Weak Lensing on the Topology of Cosmic Microwave Background Maps“. *Astrophys. J.* 544, S. L83–L86.
- SCHMALZING, J., T. BUCHERT, A. L. MELOTT, V. SAHNI, B.S. SATHYAPRAKASH et al. (1999): „Disentangling the cosmic web I: morphology of isodensity contours“. *Astrophys. J.* 526, S. 568–578.
- SCHMALZING, J., S. GOTTLÖBER, A. A. KLYPIN und A. V. KRAVTSOV (1999): „Quantifying the evolution of higher order clustering“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 309, S. 1007–1016.
- SHANDARIN, S. F. und Ya. B. ZEL'DOVICH (1989): „The large-scale structure of the universe: turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium“. *Rev. Mod. Phys.* 61, S. 185.
- SPRINGEL, V. (2005): „The cosmological simulation code GADGET-2“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 364, S. 1105–1134.
- SPRINGEL, V., C. S. FRENK und S. D. M. WHITE (2006): „The large-scale structure of the Universe“. *Nature* 440, S. 1137–1144.
- SPRINGEL, V., Simon D. M. WHITE, Adrian JENKINS, Carlos S. FRENK, Naoki YOSHIDA, Liang GAO, Julio NAVARRO, Robert THACKER, Darren CROTON, John HELLY, John A. PEACOCK, Shaun COLE, Peter THOMAS, Hugh COUCHMAN, August EVRARD, Jörg COLBERG und Frazer PEARCE (2005): „Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars“. *Nature* 435, S. 629–636.
- STOUGHTON, C., R. H. LUPTON, M. BERNARDI, M. R. BLANTON, S. BURLES, F. J. CASTANDER, A. J. CONNOLLY, D. J. EISENSTEIN et al. (2002): „Sloan Digital Sky Survey: Early Data Release“. *Astron. J.* 123, S. 485–548.
- STOYAN, D., W. KENDALL und J. MECKE (1987): *Stochastic Geometry and Its Applications*. Berlin: J. Wiley & Sons/Akademie-Verlag.
- STRAUMANN, N. (1984): *General Relativity and Relativistic Astrophysics*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- SYLOS LABINI, F. (2011): „Very large-scale correlations in the galaxy distribution“. *Europhys. Lett.* 96, S. 59001.

- TRÜMPER, M. (1965): „On a Special Class of Type-I Gravitational Fields“. *Journal of Mathematical Physics* 6, S. 584.
- WEIL, W. (2000): „Mixed Measures and Inhomogeneous Boolean Models“. In: *Statistical Physics and Spatial Statistics. The Art of Analyzing and Modeling Spatial Structures and Pattern Formation*. Hrsg. von K. R. MECKE und D. STOYAN. Bd. 554. Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, S. 95–110.
- WHITBOURN, J. R. und T. SHANKS (2014): „The local hole revealed by galaxy counts and redshifts“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 437, S. 2146–2162.
- WIEGAND, A., T. BUCHERT und M. OSTERMANN (2014): „Direct Minkowski Functional analysis of large redshift surveys: a new high-speed code tested on the luminous red galaxy Sloan Digital Sky Survey-DR7 catalogue“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 443, S. 241–259.
- XU, X., A. J. CUESTA, N. PADMANABHAN, D. J. EISENSTEIN und C. K. MCBRIDE (2013): „Measuring D_A and H at $z=0.35$ from the SDSS DR7 LRGs using baryon acoustic oscillations“. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* 431, S. 2834–2860.
- YORK, D. G. und DIE SDSS-KOLLABORATION (2000): „The Sloan Digital Sky Survey: Technical Summary“. *Astron. J.* 120, S. 1579–1587.
- ZEHAVI, I., D. J. EISENSTEIN, R. C. NICHOL, M. R. BLANTON, D. W. HOGG, J. BRINKMANN, J. LOVEDAY, A. MEIKSIN, D. P. SCHNEIDER und M. TEGMARK (2005): „The Intermediate-Scale Clustering of Luminous Red Galaxies“. *Astrophys. J.* 621, S. 22.
- ZEL'DOVICH, Ya. B. (1970a): „Fragmentation of a homogeneous medium under the action of gravitation“. *Astrophysics* 6, S. 164.
- (1970b): „Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations“. *Astron. & Astrophys.* 5, S. 84.
- (1978): „The theory of the large scale structure of the universe“. In: *The large scale structure of the universe; Proceedings of the Symposium, Tallin, Estonian SSR, September 12-16, 1977*. Hrsg. von M. S. LONGAIR und J. EINASTO. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., S. 409–420.
- ZEL'DOVICH, Ya. B. und A. G. MYSHKIS (1973): *Elements of Mathematical Physics, Medium of Non-interacting Particles (in Russian)*. Moscow: Nauka.

Danksagung

Nachdem mein Betreuer, Zimmerkollege und Freund Jens Schmalzing 2005 auf tragische Weise ums Leben kam, legte ich meine Arbeit, die bereits zu einem großen Teil fertiggestellt war, zunächst zur Seite. Ich widmete mich in dieser Zeit ganz dem schon vorher gefassten Beschluss, in das Referendariat zum Gymnasiallehramt zu wechseln.

Dass ich nun – fast zehn Jahre später – meine Arbeit doch noch einreichen kann, verdanke ich zuallererst Prof. Dr. Thomas Buchert, der über all die Jahre den Kontakt zu mir nie abreißen ließ und mich immer wieder aus der Schule in die Physik zurückholte. Lieber Thomas, danke für alles!

Prof. Dr. Herbert Wagner und Priv.Do. Dr. Martin Kerscher danke ich herzlich dafür, dass sie die Rolle als Gutachter für meine Arbeit so bereitwillig übernommen haben. Mir ist bewusst, dass das nach all den Jahren nicht selbstverständlich ist. Ebenso danke ich dem Dekan der Fakultät für Physik, Prof. Dr. Schenzle, der mir sofort und ohne jede bürokratische Hürde die Unterstützung für den Abschluss meines Projektes zusagte.

Neben der engen Zusammenarbeit mit Thomas Buchert und Jens Schmalzing fanden vor allem in der Frühphase dieser Arbeit viele spannende und fruchtbare Diskussionen mit Professor Wagner, Claus Beisbart und Martin Kerscher statt. Finanziell unterstützt wurde ich in meinen Jahren an der LMU durch die DFG im Rahmen des Sonderforschungsbereichs SFB 375 Astroteilchenphysik.

Zudem möchte ich meiner Frau Carolin ganz herzlich für all ihre Hilfe und Unterstützung beim Anfertigen, Abbrechen, Liegenlassen, Wiederaufnehmen und Fertigstellen dieser Arbeit danken. Genauso gilt mein Dank meinen Eltern Marga und Peter Ostermann, meinem Bruder Nikolas samt Familie sowie ganz besonders auch Dorothea. Danke euch allen, auch für eure Geduld!

Zu guter Letzt danke ich Dr. Wolfgang Ober und Peter Ostermann für ihr sorgfältiges Lesen des Manuskripts und viele wertvolle Anregungen. Ohne ihre Unterstützung und die aller anderen genannten Personen läge diese Arbeit nicht in ihrer jetzigen Form vor. Selbstverständlich gehen alle verbleibenden oder nachträglich eingebauten Fehler zu meinen Lasten.

September 2014
Matthias Ostermann

Curriculum Vitae

Name: Matthias Ostermann
Geburtsdatum: 21. Juli 1976
Geburtsort: München
Nationalität: Deutsch

seit 09/2009	<p>Studienrat am Oskar-Maria-Graf-Gymnasium in Neufahrn b. Freising mit den Fächern Physik und Mathematik</p> <ul style="list-style-type: none">- Sprecher für Physik im Schul-Modellprojekt „lernreich2.0 - digitales Üben und Feedback“- Betreuungslehrer Physik im Intensivpraktikum für Lehramtsstudenten der LMU- Mitarbeit bei dem MINT-Club des OMG- Leiter Schulhomepage-Team- Zweiter Systembetreuer
09/2007 bis 08/2009	<p>Vorbereitungsdienst (Referendariat) und Zweites Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien am Max-Planck-Gymnasium München</p>
01/2004 bis 12/2006	<p>Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Ludwig-Maximilians-Universität (LMU) München und des Sonderforschungsbereichs 375 Astroteilchenphysik</p>
09/2003 bis 12/2003	<p>Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Physik der LMU München</p>
10/1997 bis 05/2003	<p>Studium der Physik an der LMU München</p>
10/1996 bis 09/1997	<p>Zivildienst bei der Stiftung Pfennigparade für körperbehinderte Menschen in München</p>
09/1993 bis 06/1996	<p>Besuch des Karls Gymnasiums München mit Abitur in den Fächern Altgriechisch, Mathematik, Geschichte und Physik</p>
09/1987 bis 08/1993	<p>Besuch des Max-Planck-Gymnasiums München</p>
09/1983 bis 08/1987	<p>Besuch der Grundschule an der Blumenauer Straße in München</p>

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst sowie keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

München, den 7. Oktober 2014